

# Des écoulements compressibles aux écoulements faiblement dilatables

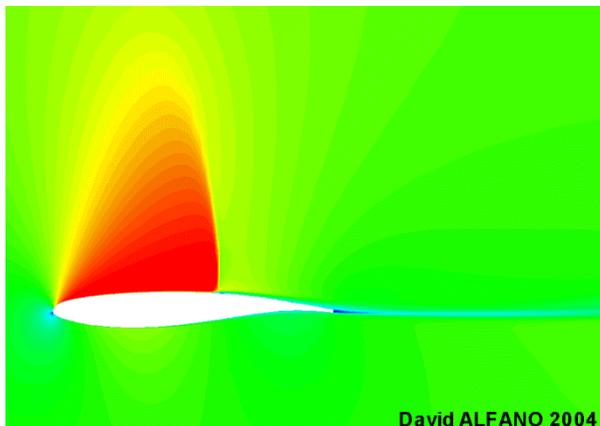
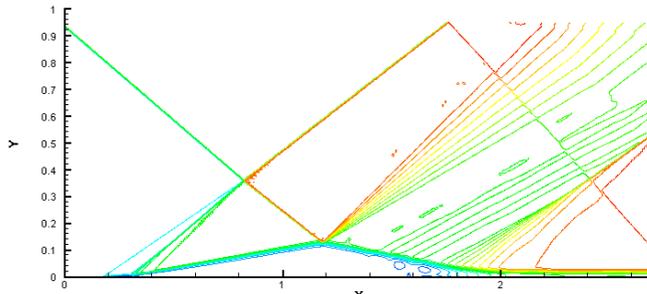
Virginie DARU

DynFLuid, ENSAM

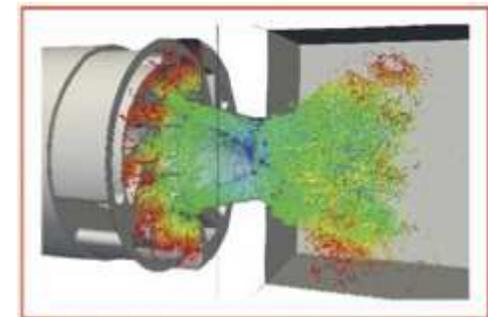
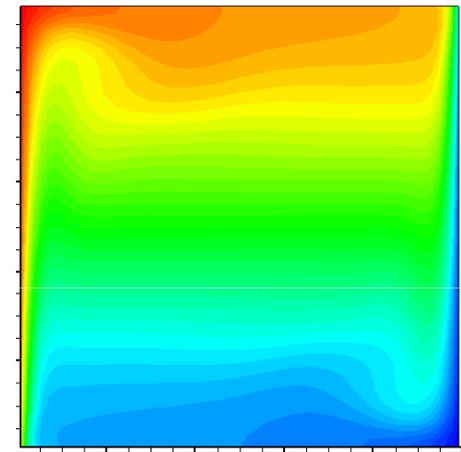
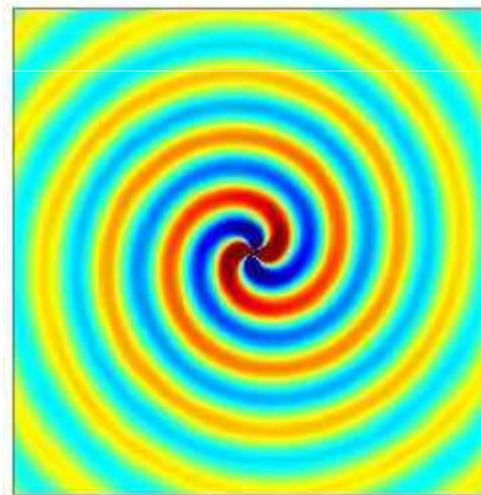
LIMSI, CNRS

# Introduction

Écoulements compressibles  $\longrightarrow$  Écoulements dilatables



acoustique



# Écoulements compressibles : effets de compressibilité

## Interaction choc/couche limite (laminaire)

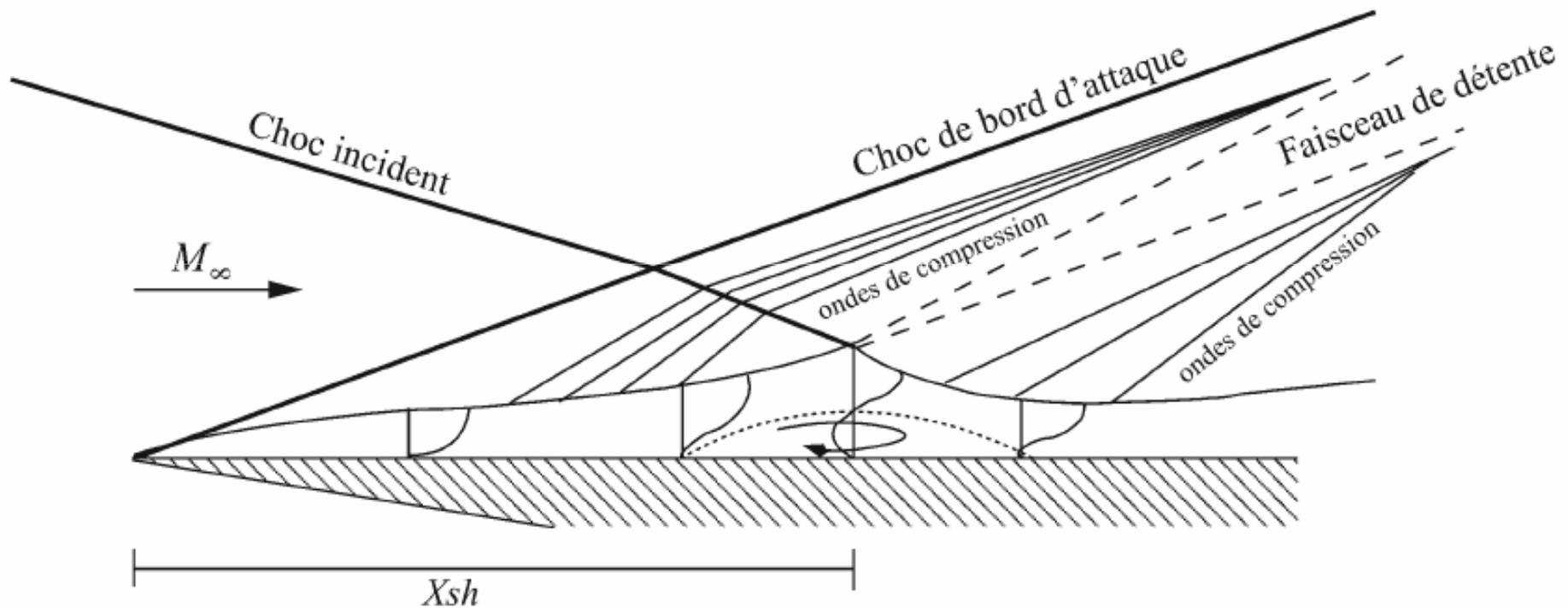
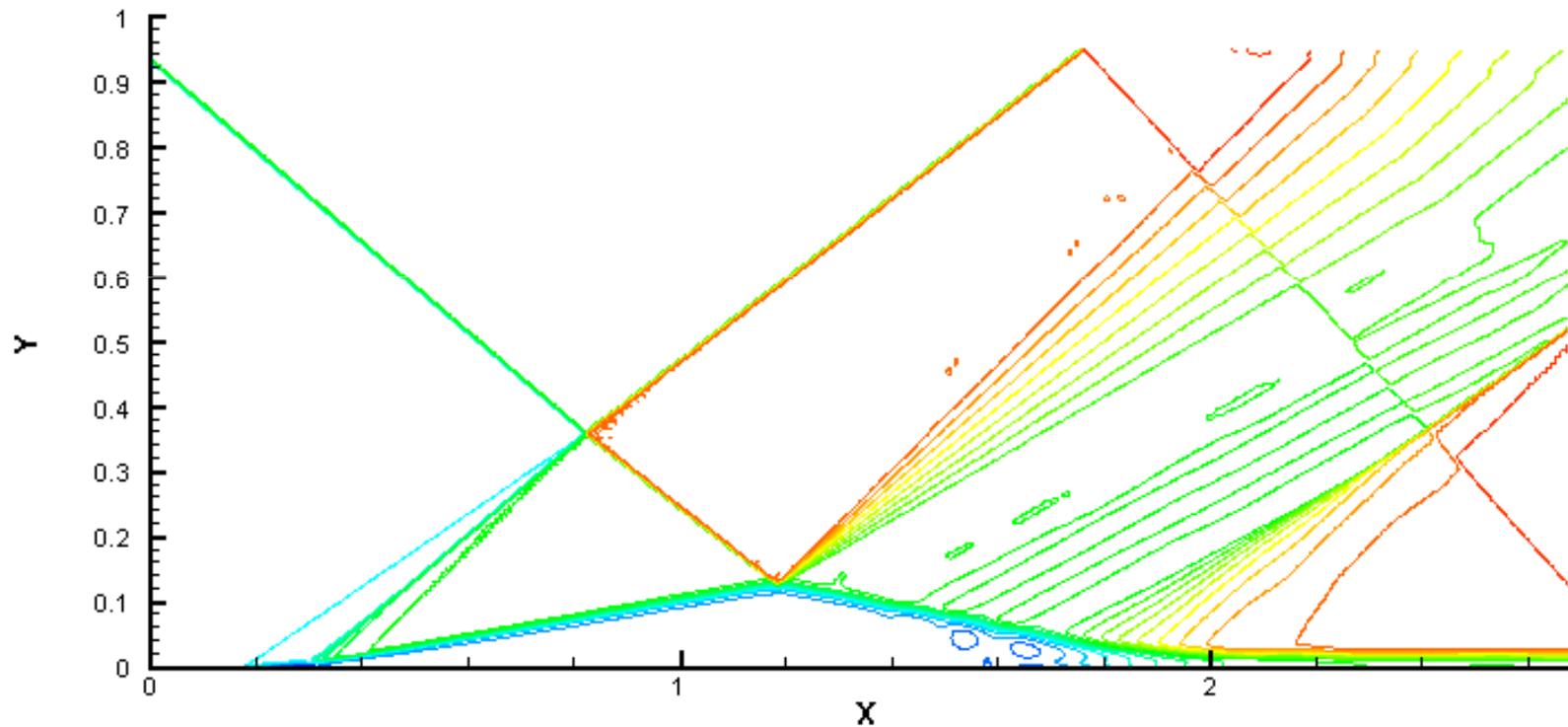


Figure 1 : Visualisation schématique de l'interaction choc-couche limite

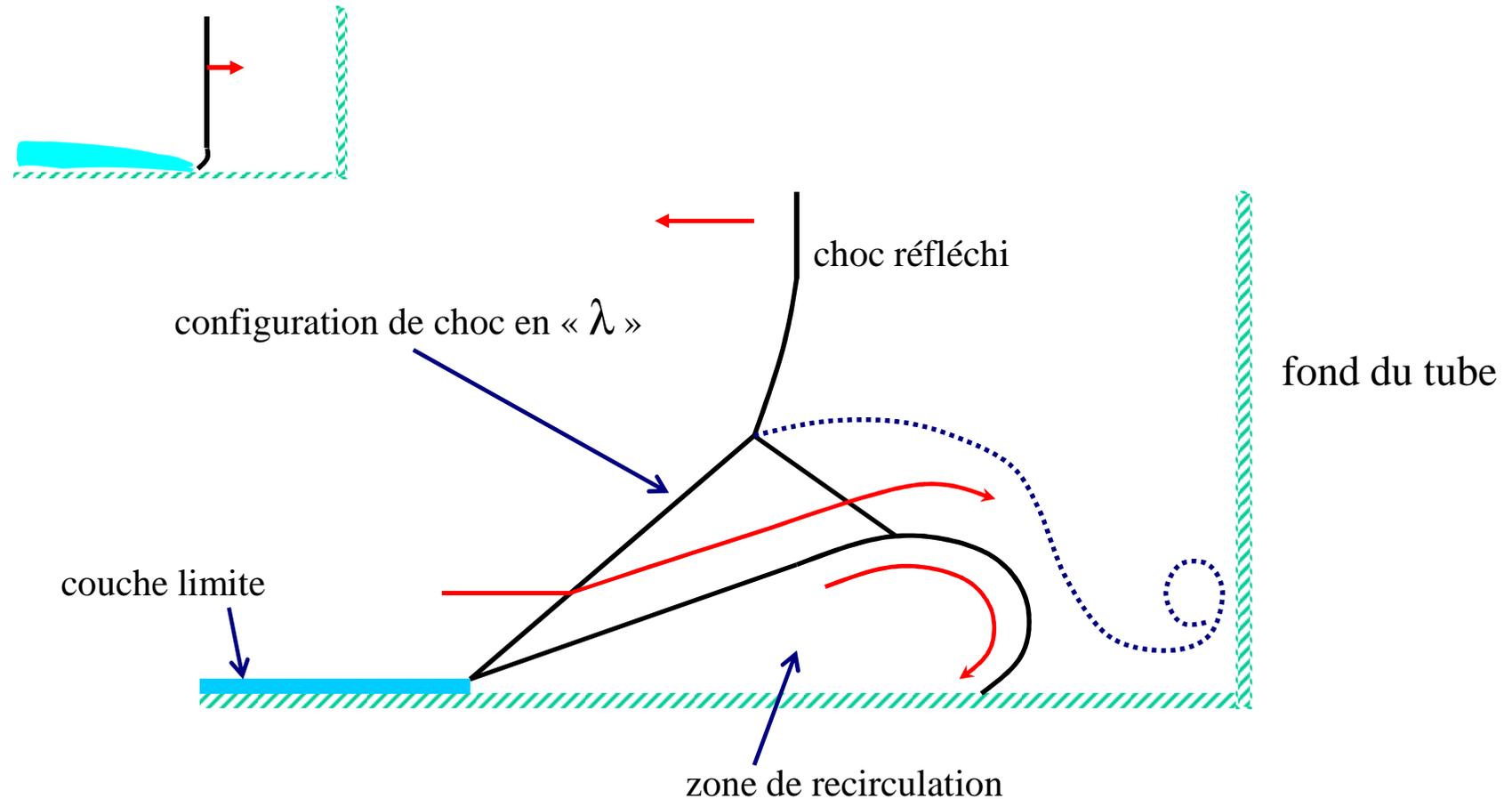
Re=100 000    Mach=2,15    angle choc incident=35°

Masse volumique (schéma OSMP7)

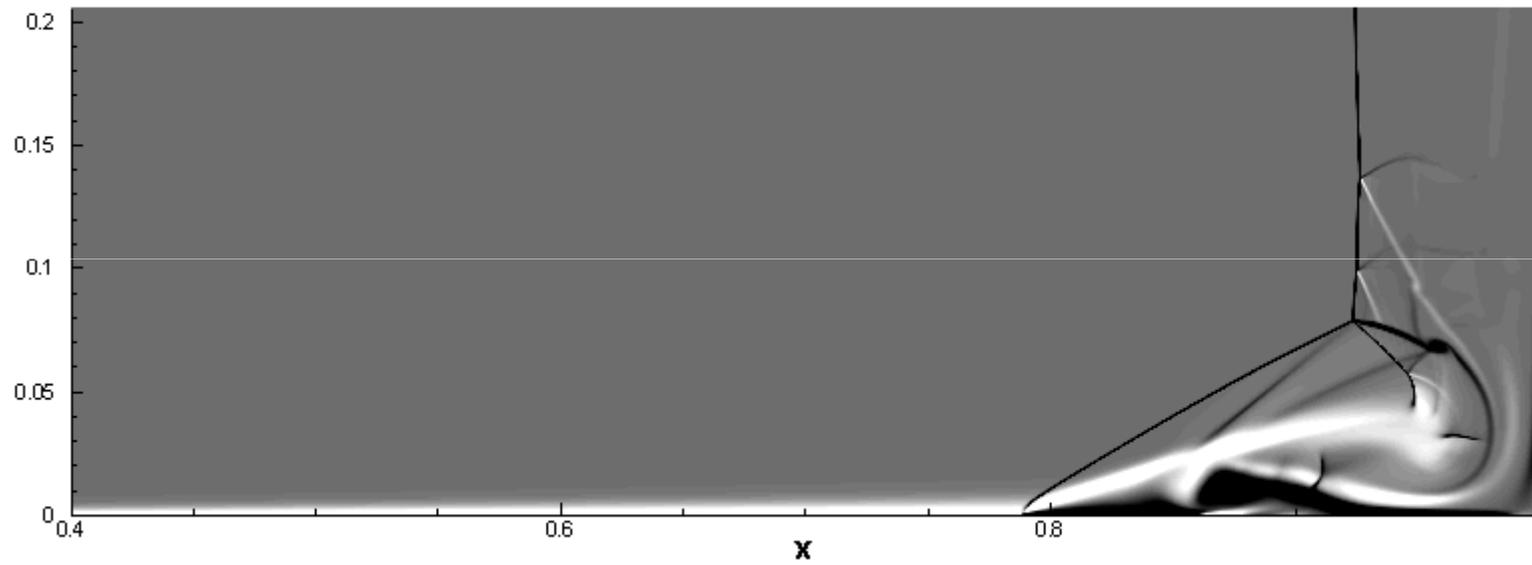


# Écoulements compressibles : effets de compressibilité

## Interaction choc réfléchi/couche limite dans un tube à choc



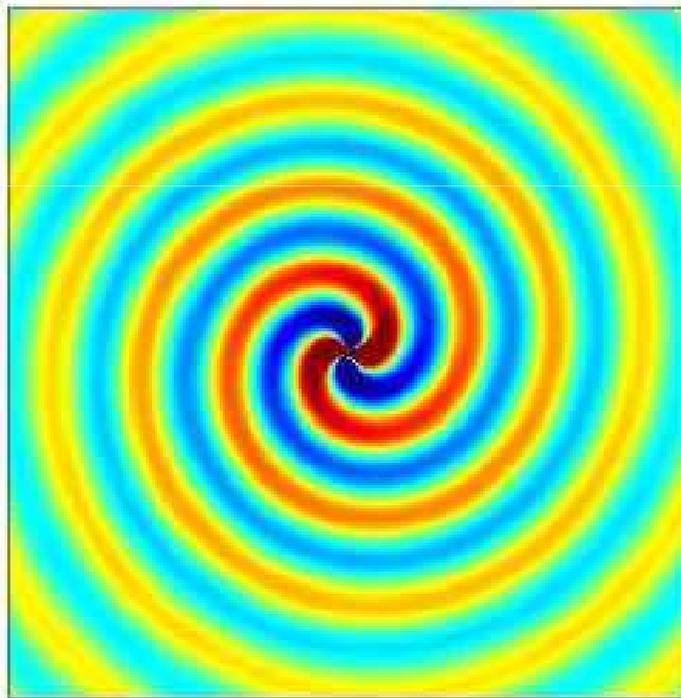
# Visualisation de $\text{div } v + \text{rot } v$



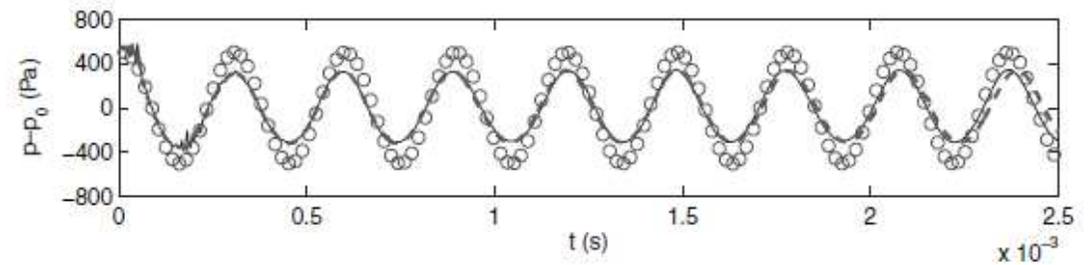
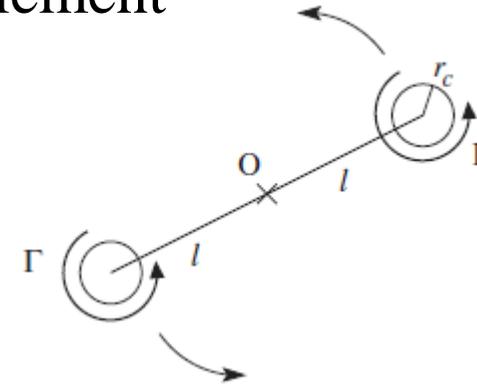
## Écoulements compressibles : effets de compressibilité

Champ acoustique généré par un écoulement tourbillonnaire quasi-incompressible

Tourbillons co-rotatifs

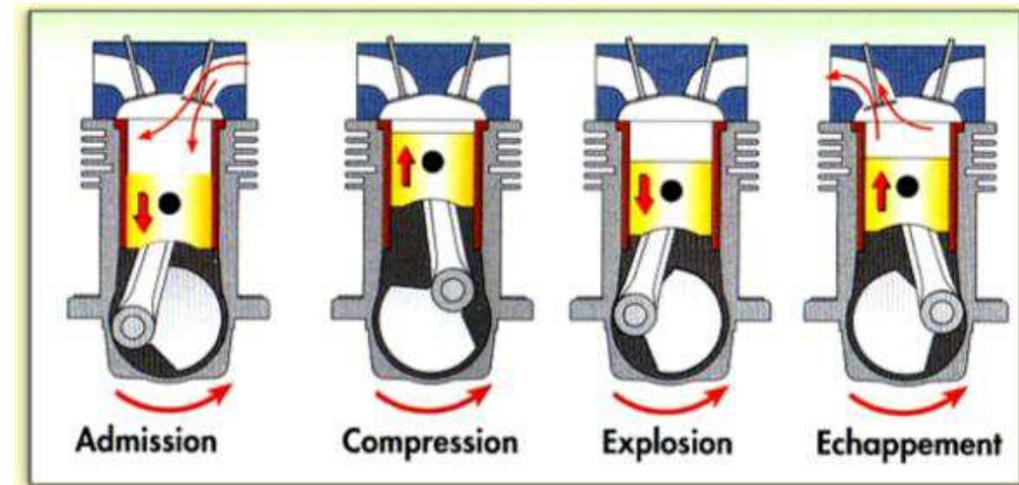
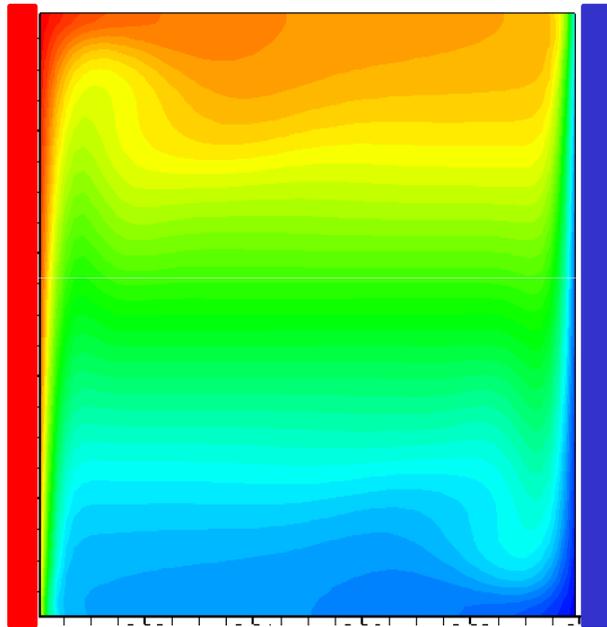


Pression fluctuante

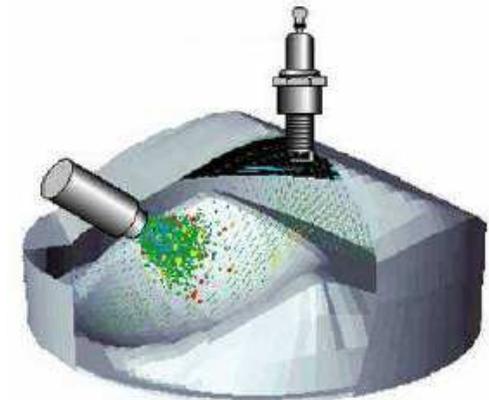


## Écoulements compressibles : effets de compressibilité

Grandes variations de température dans un écoulement ( $> 30\text{ K}$ ),  
compression en volume  $\Rightarrow$  écoulement à masse volumique variable



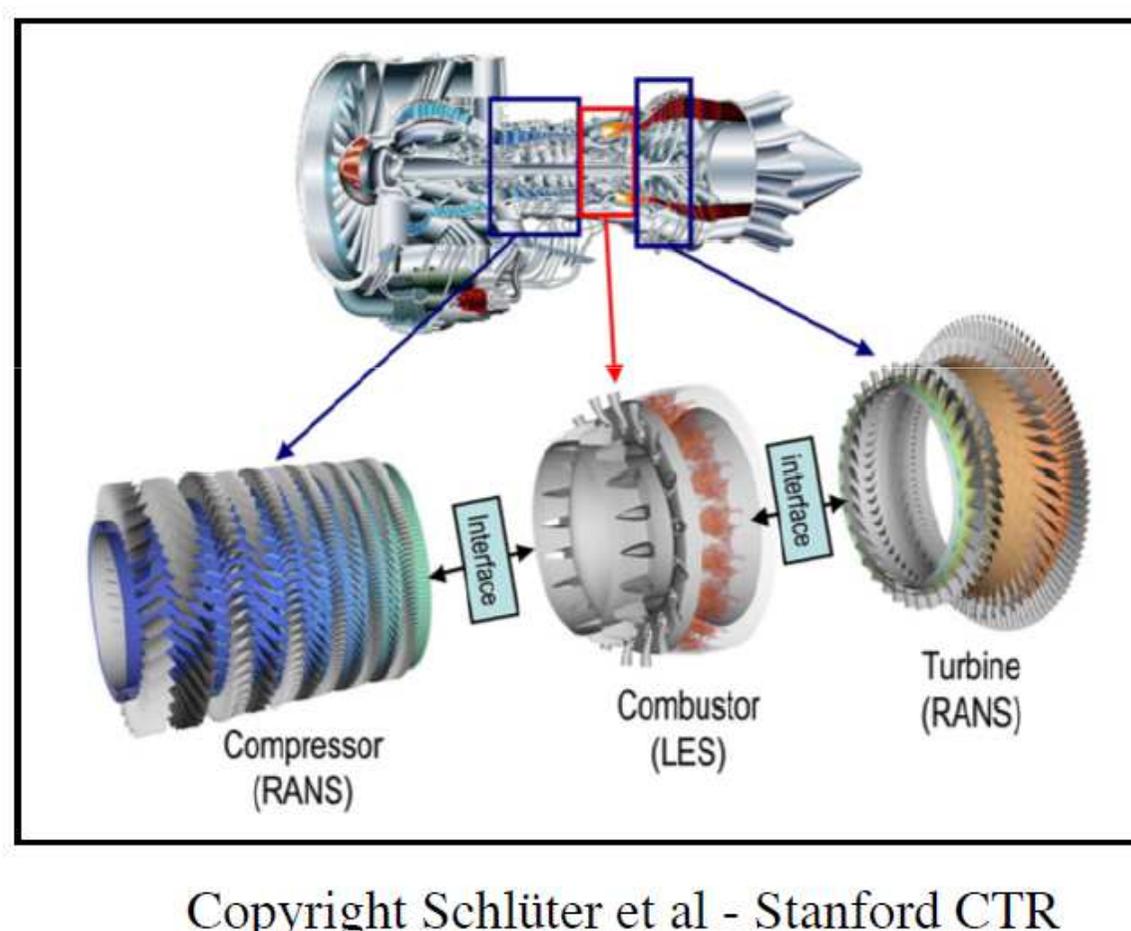
Ici les vitesses sont petites devant la vitesse du son. On ne s'intéresse pas à l'acoustique.



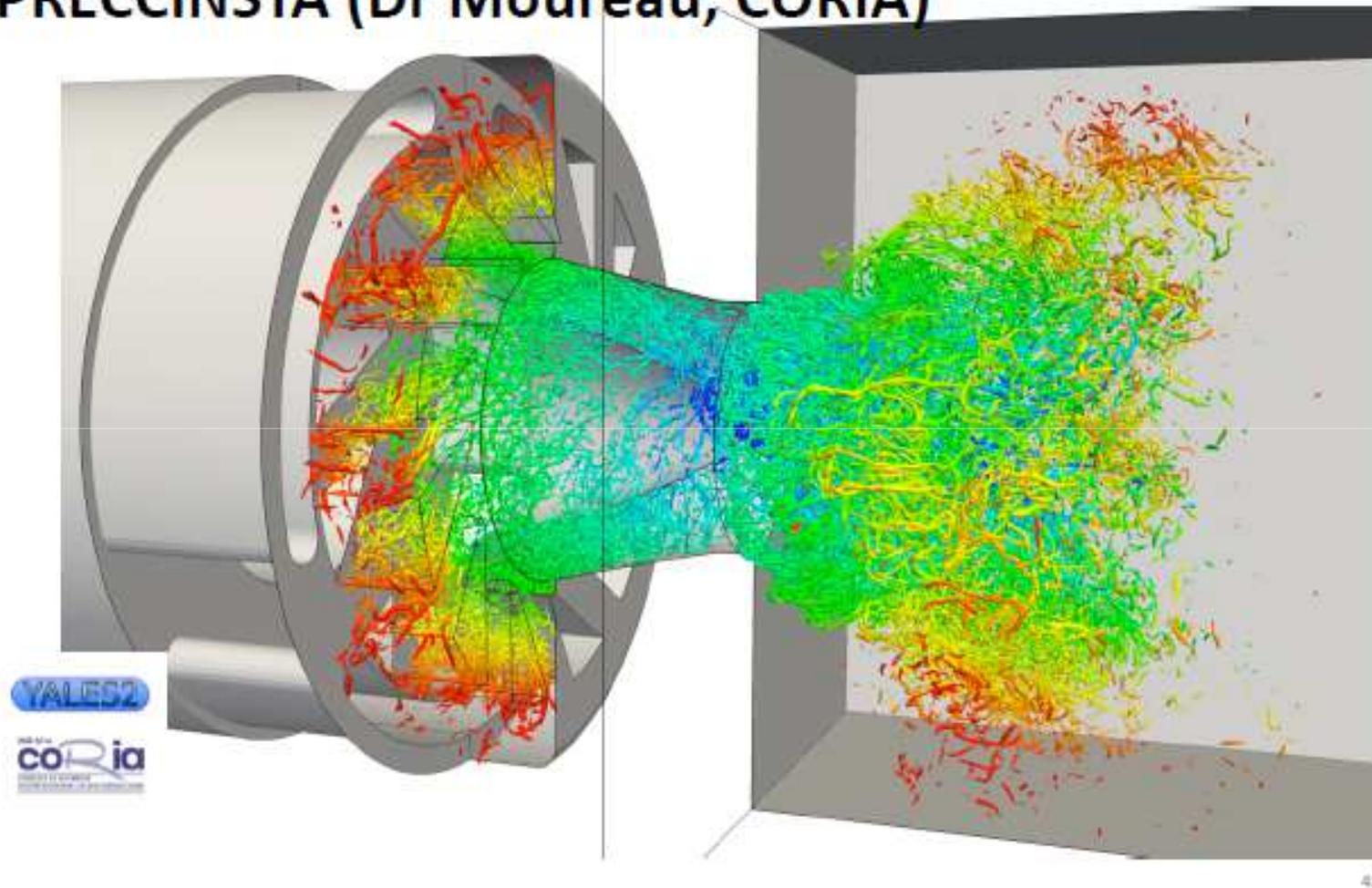
**Combustion** : forts contrastes de masse volumique.

La combustion produit plus de 85% de l'énergie aujourd'hui...

Moteurs aéronautiques : turbines à gaz.



# Visualisation of vortices using the Q criterion in PRECCINSTA (Dr Moureau, CORIA)



DLR PRECCINSTA BURNER, Experiments: W. Meier et al., Combust. Flame, 150(1/2):2–26, 2007

- Ecoulements compressibles : caractérisés par des phénomènes de transport, convectif et ondes
- Vitesse du fluide , vitesse du son  $\Rightarrow$  nombre de Mach  $M$
- $M \sim 1$  : ondes de compression et détentes, ondes de choc.
- $M \rightarrow 0$  : faible Mach. L'amplitude des ondes  $\rightarrow 0$  : ondes acoustiques. Séparation d'échelles convection-acoustique.
- Limite  $M \rightarrow 0$  singulière. Vitesse des ondes infinie. Ecoulement incompressible  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- Changement de nature des équations (pression) : hyperbolique  $\rightarrow$  elliptique
- Impossible d'utiliser un code compressible explicite pour calculer un écoulement incompressible.

- Compressible à faible Mach : contrainte de stabilité sévère sur le pas de temps due à l'acoustique → inefficacité. Eventuels problèmes de précision.
- Faible Mach : préférable d'utiliser un modèle où l'acoustique est supprimée
- Ecoulements faible Mach très courants dans la nature et la technologie : circulation atmosphérique et océanique, combustion (moteurs), transfert de chaleur.
- Modèles basés sur analyse asymptotique.
- Tentatives de modèles « all Mach ».

## Objectifs du cours

- Donner une vue rapide d'ensemble de la modélisation et simulation numérique des écoulements pour tout nombre de Mach (approche différences finies).
- Analyse des effets de compressibilité dans le modèle compressible
- Analyse asymptotique pour le développement de modèle faible Mach
- Focus sur les problématiques numériques suivant M
- Un mot sur les méthodes « all Mach ».
- Eléments d'application en diphasique.

# Sommaire

## I. Modélisation des écoulements compressibles.

- .1 Equations de Navier-Stokes pour le compressible et analyse à bas Mach. .
- .2 Un exemple d'écoulement simple. . . . .
- .3 Analyse asymptotique et modèle pour les écoulements à faible Mach. . .

## II. Méthodes numériques.

- [.1 Méthodes numériques pour le compressible. . . . .
- [.2 Méthodes numériques pour les écoulements contraints. . . . .
  - ] .2.1 Écoulements incompressibles. . . . .
  - ] .2.2 Écoulements faible Mach. . . . .
- [.3 Un aperçu sur les méthodes "all speed". . . . .

## III. Écoulements diphasiques.

- .1 Impact de gouttes. . . . .
- .2 Écoulement liquide gaz en enceinte fermée. . . . .

# I. Modélisation des écoulements compressibles

## I.1. Equations de Navier-Stokes pour le compressible et analyse à bas Mach

Conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale : **équations de Navier-Stokes**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \mathbf{v}) \end{array} \right.$$

fluide parfait

effets visqueux +  
conduction chaleur

+ loi d'état gaz parfait :

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad \text{ou} \quad p = r \rho T$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad r = c_p - c_v$$

## Vitesse du son

Thermodynamique :  $dp = c^2 d\rho + (\gamma - 1)\rho T dS$

$\Rightarrow$  Vitesse du son :  $c^2 = dp/d\rho|_S$

Soit pour un gaz parfait :  $c = (\gamma p/\rho)^{\frac{1}{2}} = (\gamma r T)^{\frac{1}{2}}$

Nombre de mach :  $M = \frac{|\mathbf{v}|}{c}$

# Ondes

Caractérisent les écoulements compressibles

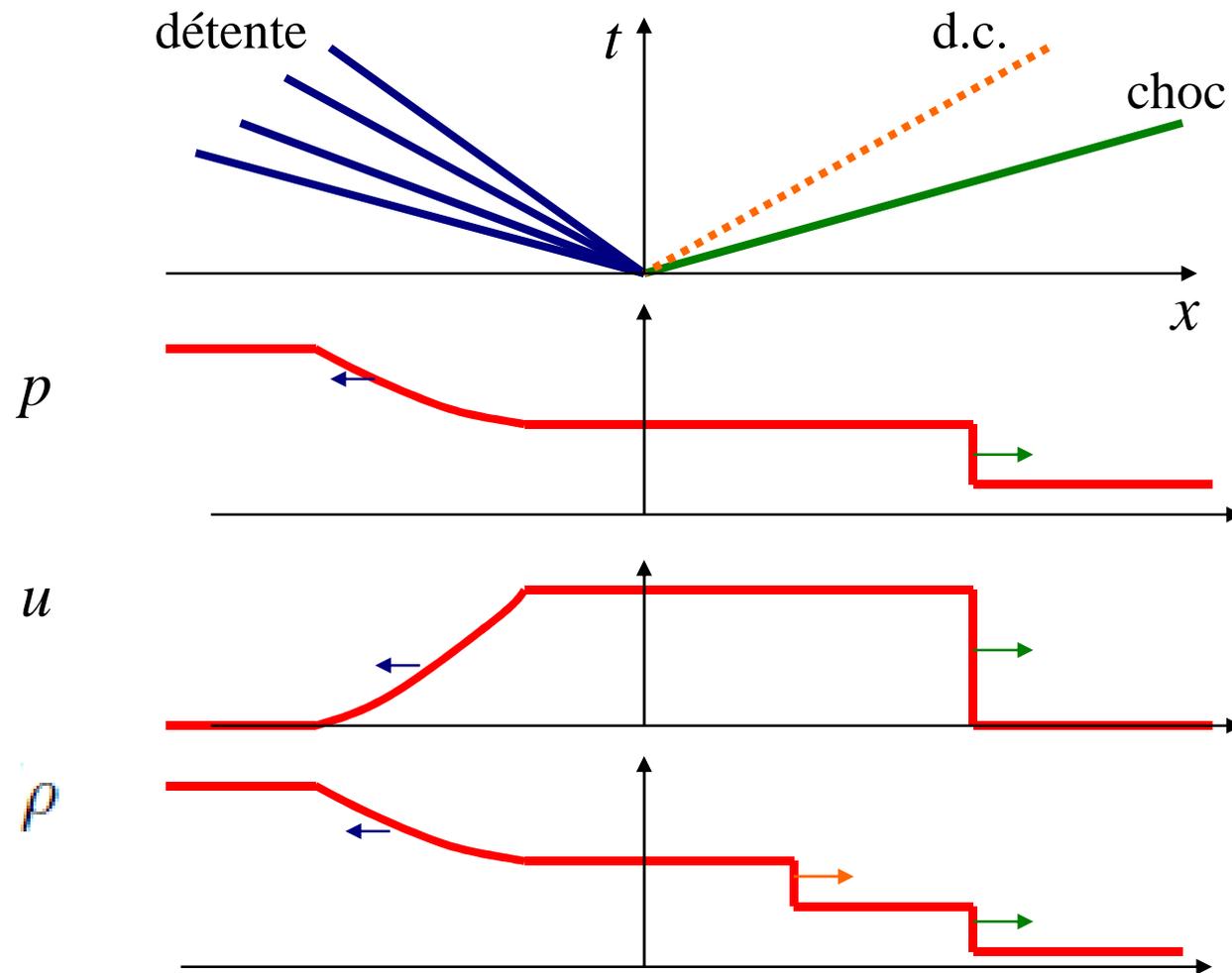
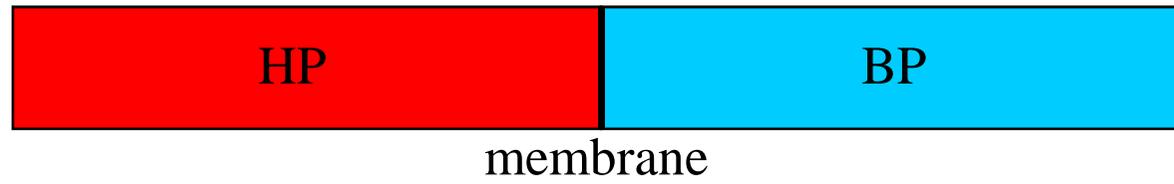
3 grands types d'ondes : ondes simples, ondes de choc, discontinuités de contact

**Ondes simples** : compressions ou détentes, continues et isentropiques

**Ondes de choc** : ondes de compressions discontinues, toutes les variables subissent un saut. Ont leur vitesse propre.

**Discontinuités de contact** : surfaces de discontinuité matérielle, vitesse de l'écoulement.

Exemple du tube à choc :



Fluide parfait : **équations d'Euler 1D** (forme conservative)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0$$

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad f(w) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho E u + pu \end{pmatrix}$$

+ loi d'état : gaz parfait  $p = (\gamma - 1)\rho e$

Forme non conservative (écoulements réguliers)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

A matrice jacobienne,  $A(w) = \frac{df(w)}{dw}$

$$A(w) = \frac{df}{dw} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\gamma-1}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\frac{\gamma-1}{2}u^2 - H)u & H - (\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

H enthalpie totale  $H = E + p / \rho$

Ce système est **hyperbolique**, ie la matrice  $A(w)$

a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable

Valeurs propres de  $A$  :  $\lambda^1 = u - c, \lambda^2 = u, \lambda^3 = u + c$

$$c \text{ vitesse du son : } c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{\gamma p}{\rho} = (\gamma - 1)(H - u^2/2)$$

Vecteurs propres de  $A$  : à droite

$$r^1 = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ H - cu \end{bmatrix}, \quad r^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2/2 \end{bmatrix}, \quad r^3 = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ H + cu \end{bmatrix}$$

à gauche

$$l^1 = \frac{\gamma - 1}{p} \begin{bmatrix} \frac{u^2}{2} + \frac{cu}{\gamma - 1} \\ -u - \frac{c}{\gamma - 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad l^2 = -\frac{1}{p} \begin{bmatrix} \frac{u^2}{2} - \frac{c^2}{\gamma - 1} \\ -u \\ 1 \end{bmatrix}, \quad l^3 = \frac{\gamma - 1}{p} \begin{bmatrix} \frac{u^2}{2} - \frac{cu}{\gamma - 1} \\ -u + \frac{c}{\gamma - 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisation :

$$A = R\Lambda R^{-1}$$

$$R = [r^1, r^2, r^3] \quad \Lambda = \begin{pmatrix} u - c & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u + c \end{pmatrix}$$

En variables caractéristiques :

$$R^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda R^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = R^{-1} \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = R^{-1} \frac{\partial w}{\partial x}$$

Soit :

$$\frac{dU_j}{dt} = 0 \text{ sur } \frac{dx}{dt} = \lambda^j$$

$$dU = R^{-1}dw = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(dp - \rho cdu) \\ c^2 d\rho - dp \\ \frac{1}{2}(dp + \rho cdu) \end{pmatrix}$$

## Écoulements réguliers, sans chocs forts

Courbes caractéristiques :

$$dp \pm \rho c du = 0 \quad \text{le long de:} \quad \frac{dx}{dt} = u \pm c$$

Ondes de compression ou détente

Trajectoires :

$$dp = c^2 d\rho \quad \text{le long de:} \quad \frac{dx}{dt} = u$$

Isentropie

## Écoulements isentropiques (suivant état initial)

$$dp = c^2 d\rho \quad \text{partout}$$

$$\text{de façon équivalente} \quad p/\rho^\gamma = \text{cte} = p_0/\rho_0^\gamma$$

$$\text{Gaz parfait} \Rightarrow T = \frac{p_0}{r\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1}$$

L'équation d'énergie se confond avec l'équation de continuité

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1)T \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

A travers les ondes de compression ou de détente :

$$dp = c^2 d\rho \quad \text{et} \quad dp = \rho c du \quad \text{ou} \quad dp = -\rho c du$$

Nombre de Mach :  $M = \frac{|u|}{c}$

Ordre de grandeur des variations si M petit :

$$\frac{dp}{\rho c^2} = \frac{d\rho}{\rho} = \pm \frac{du}{c} = \mathcal{O}(M)$$

Système isentropique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \partial p = c^2 \partial \rho$$

Décomposition convection-effets de compressibilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho u}{\partial x} - \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

convection

compressibilité

Etude à faible Mach  $M \ll 1$

$$dt \propto dx / c$$

Echelle temporelle liée à la vitesse des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{c} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \mathcal{O}(M) \quad \mathcal{O}(M^2) \quad \mathcal{O}(M) \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c^2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \mathcal{O}(M) \quad \mathcal{O}(M^2) \quad \mathcal{O}(M) \end{array} \right.$$

Le sous-système acoustique est dominant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad d\tau \propto dx / c$$

## Cas multidimensionnel (Euler)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f_1(w)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(w)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(w)}{\partial z} = 0$$

$\Rightarrow$  3 matrices jacobiennes  $A_1, A_2, A_3$

Variables caractéristiques

$$dU_1 = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{dp}{2} - \rho c \frac{du_1}{2} \\ c^2 d\rho - dp \\ \rho du_2 \\ \rho du_3 \\ \frac{dp}{2} + \rho c \frac{du_1}{2} \end{pmatrix}, \quad dU_2 = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{dp}{2} - \rho c \frac{du_2}{2} \\ c^2 d\rho - dp \\ \rho du_1 \\ \rho du_3 \\ \frac{dp}{2} + \rho c \frac{du_2}{2} \end{pmatrix}, \quad dU_3 = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{dp}{2} - \rho c \frac{du_3}{2} \\ c^2 d\rho - dp \\ \rho du_1 \\ \rho du_2 \\ \frac{dp}{2} + \rho c \frac{du_3}{2} \end{pmatrix}.$$

Sous forme non conservative :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \nabla \cdot v = 0 \end{array} \right.$$

Isentropique : l'équation d'énergie disparaît

Sous-système acoustique :

$$d\tau \propto dx/c \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \end{array} \right.$$

Intégration à l'échelle du temps  $t$  sur  $\delta t = \frac{1}{M} \delta \tau$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p(t + \delta t) - p(t)}{\delta t} + \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = 0 \\ \frac{\mathbf{v}(t + \delta t) - \mathbf{v}(t)}{\delta t} + \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} \frac{1}{\rho} \nabla p d\tau = 0 \end{array} \right.$$

Comme  $\frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} f(\tau) d\tau = f(t + \frac{\delta t}{2}) + \mathcal{O}(\delta t^2)$

On obtient une approximation à l'ordre 2 en temps du même sous-système, mais avec cette fois  $dt \sim dx/|\mathbf{v}|$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \end{cases}$$

Ceci implique que  $\frac{\partial p}{\partial t}$  et  $\nabla p$  ne sont plus du même ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \Rightarrow dp \sim \rho c^2 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 & \Rightarrow dp \sim \rho |\mathbf{v}|^2 \end{cases}$$

La pression s'est décomposée en :

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(t) + p_2(\mathbf{x}, t)$$

$p_0(t)$  pression thermodynamique, d'ordre  $\rho c^2$

$p_2(\mathbf{x}, t)$  pression dynamique, d'ordre  $M^2 p_0$

Les ondes acoustiques, d'ordre  $M$ , sont effacées

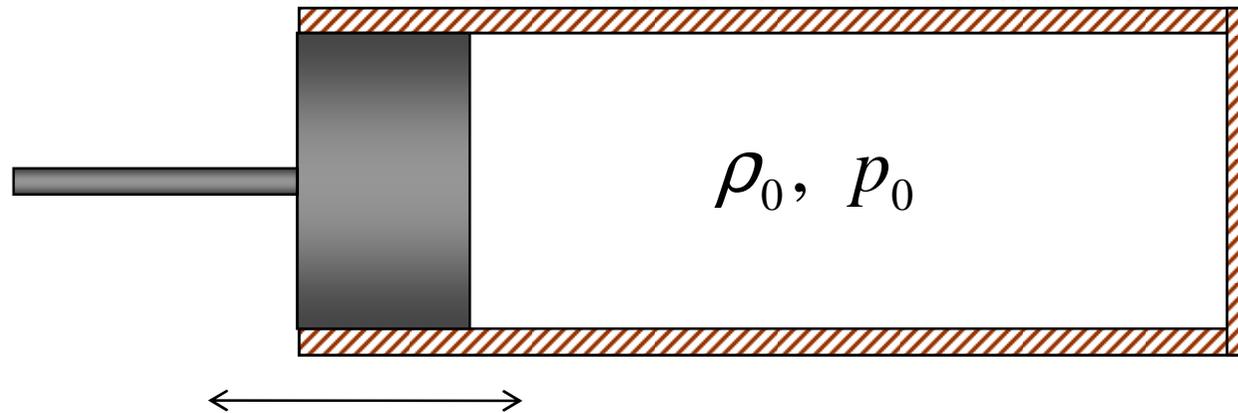
Si  $p_0 = cte$  alors on a  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathcal{O}(M^2)$

et l'équation QDM donne une équation de Poisson pour la pression :

$$\nabla \cdot \nabla p = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

## I.2. Un exemple d'écoulement simple

Cavité 1D fermée remplie d'air + piston



$$x_p(t) = \frac{a}{2}(1 - \cos \omega t)$$

$\omega = 2\pi/\Upsilon$  la pulsation

$\Upsilon$  la période

Modèle : équations d'Euler 1D.

Traitement numérique par méthode de frontières immergées (IBC).

Nombre de Mach basé sur vitesse max du piston

$\Upsilon$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.8
M	1.26	0.63	0.25	0.13	0.06	0.016

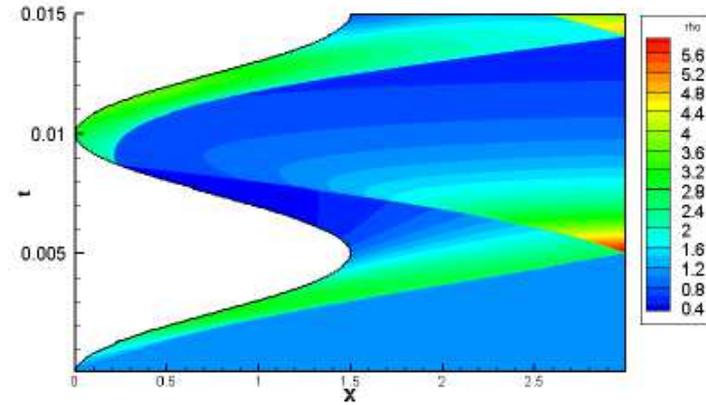
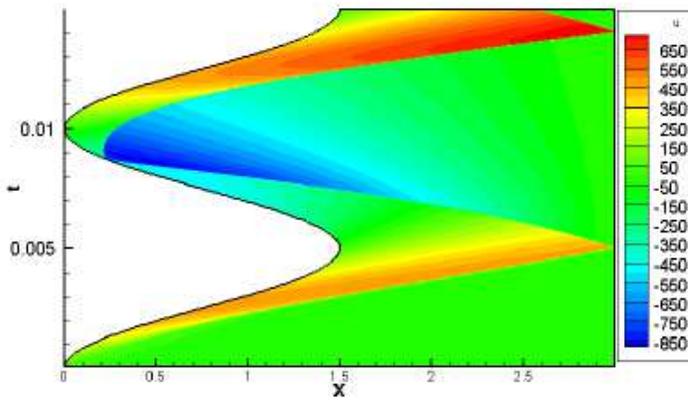
On passe d'un écoulement supersonique avec chocs et détente de forte intensité à un écoulement faible Mach, dans lequel se propagent des ondes acoustiques de faible intensité

Solution limite  $M \rightarrow 0$  : écoulement isentropique et

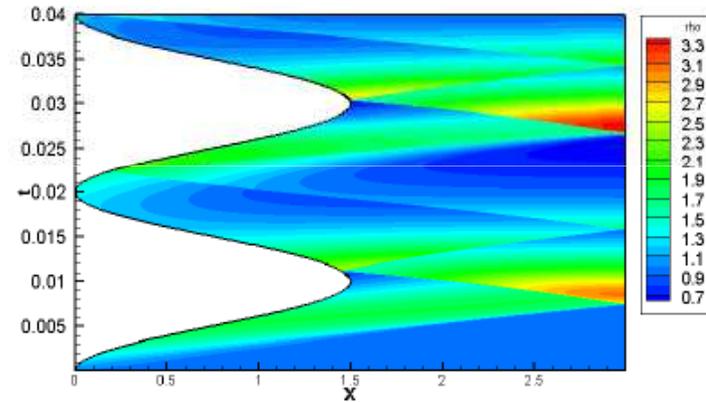
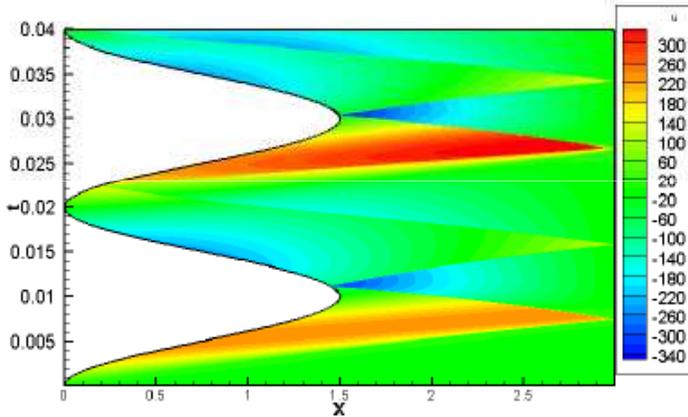
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_e(t) = \frac{4}{3}\rho_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\cos\omega t} \\ u_e = V_p(t) \frac{l_0 - x}{l_0 - x_p} \end{array} \right.$$

# Diagrammes (x,t) iso-u et iso-masse volumique

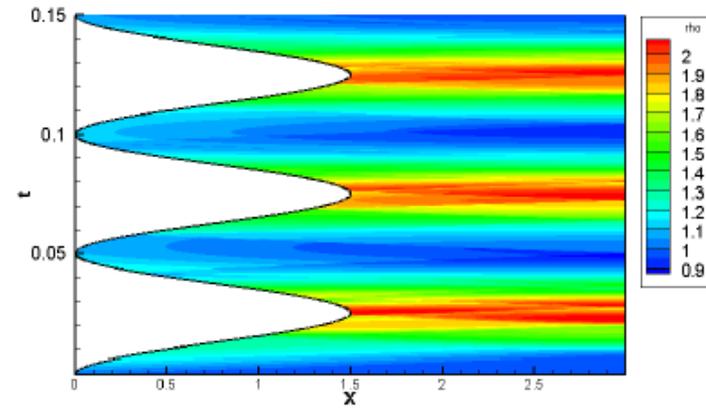
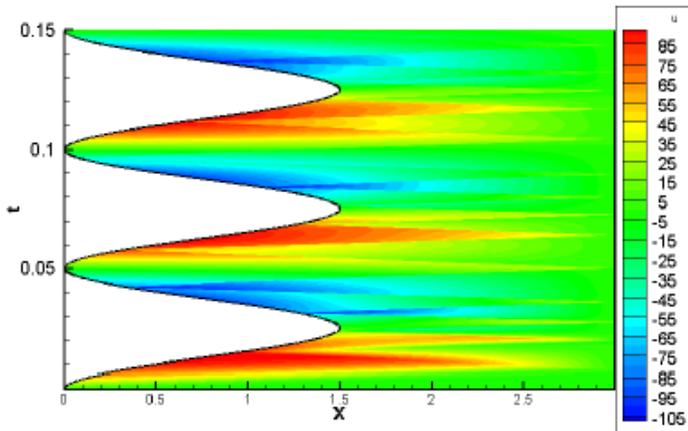
T = 0.01



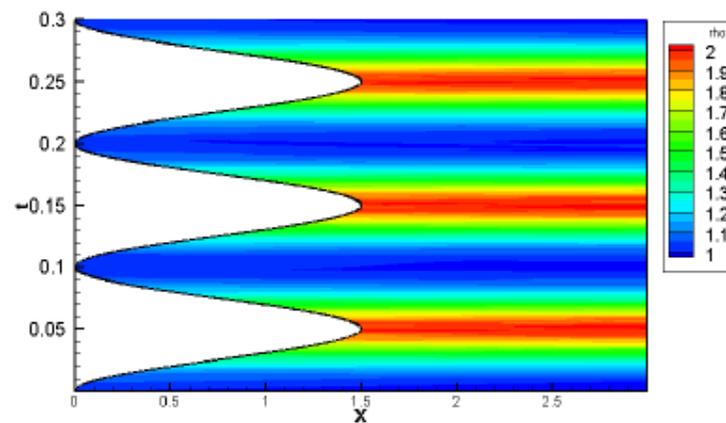
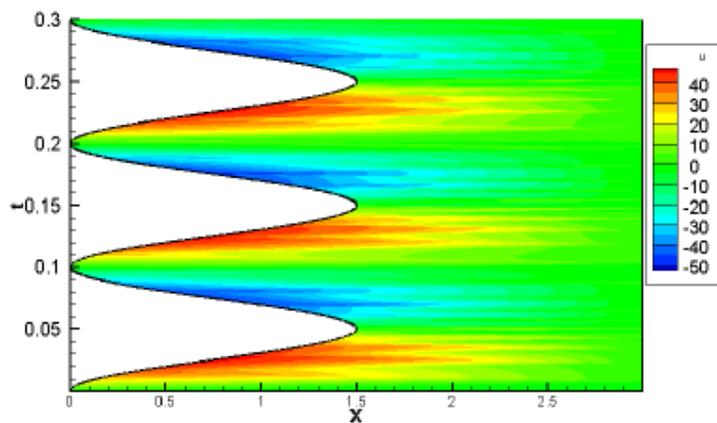
T = 0.02



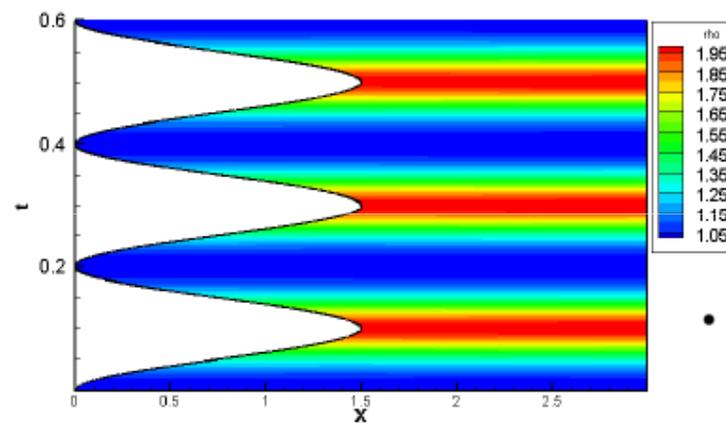
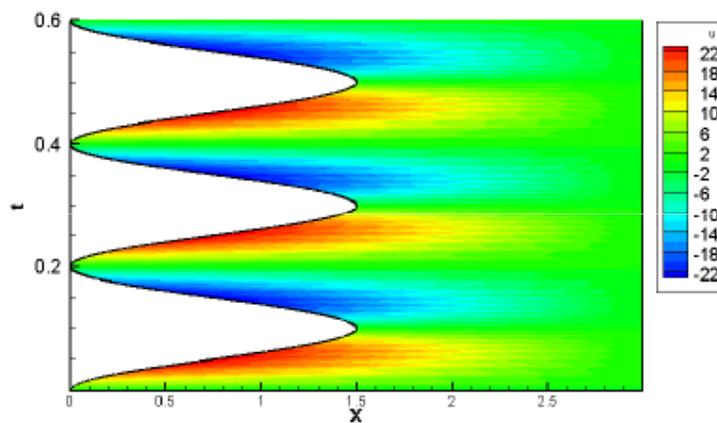
T = 0.05



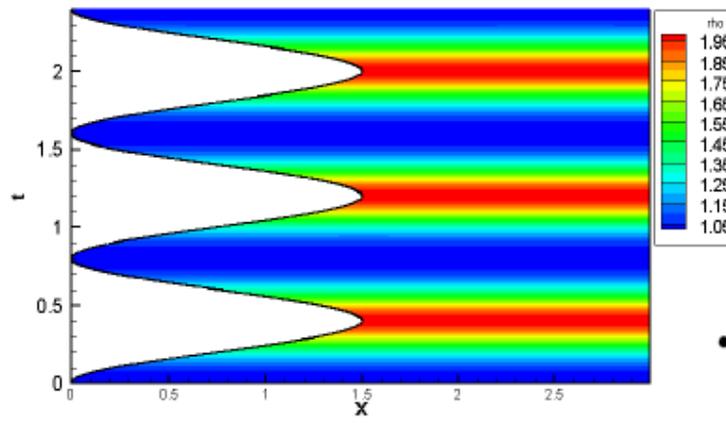
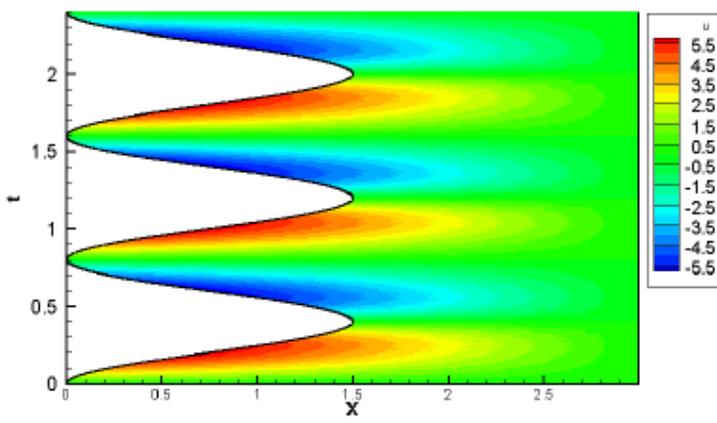
$T = 0.1$



$T = 0.2$

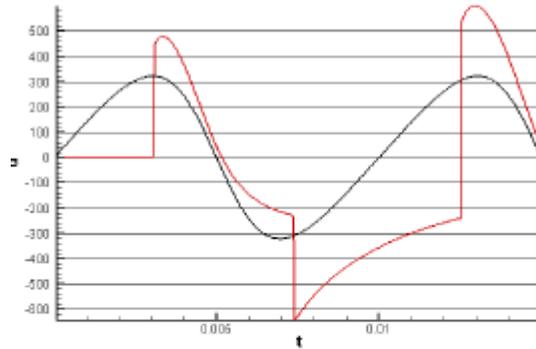


$T = 0.8$

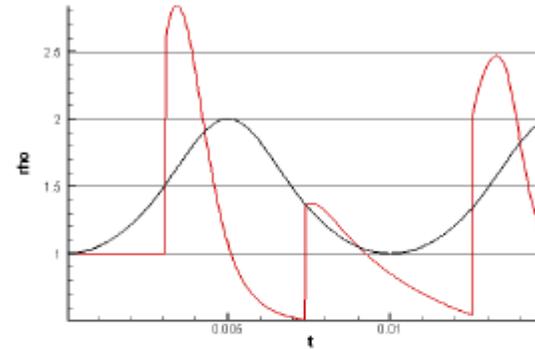


$T = 0.01$

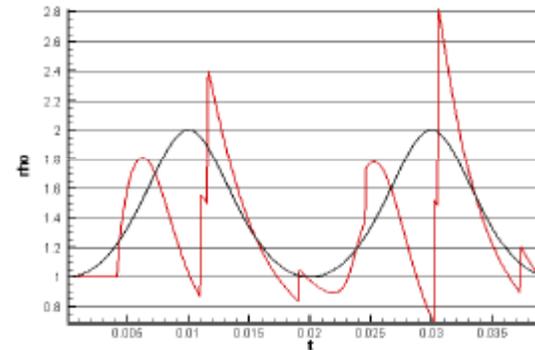
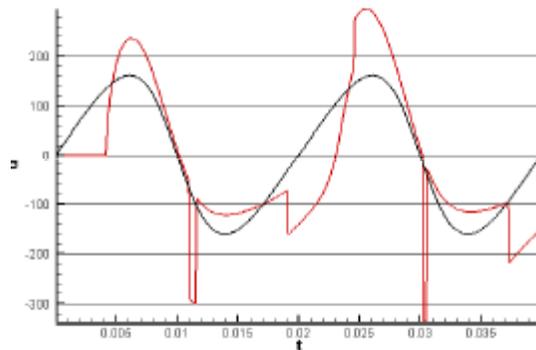
$u(1.55, t)$



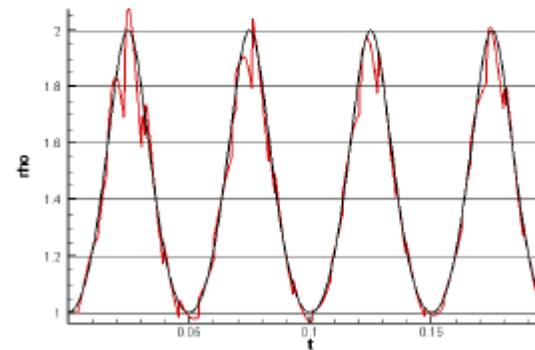
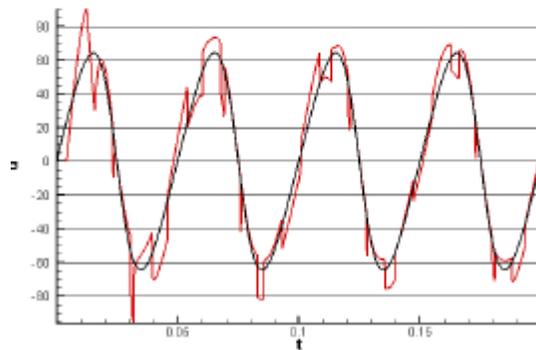
$\rho(1.55, t)$



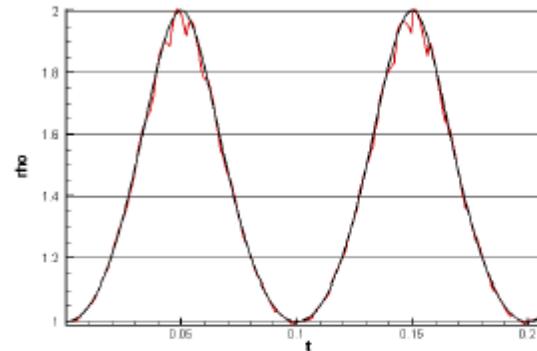
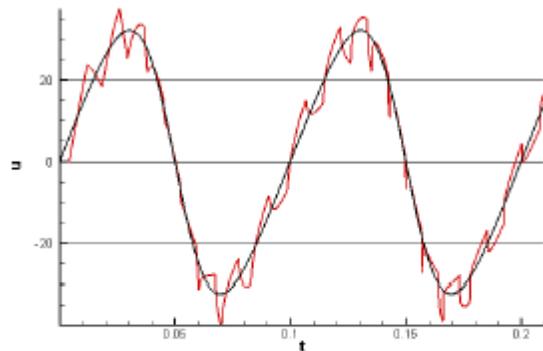
$T = 0.02$



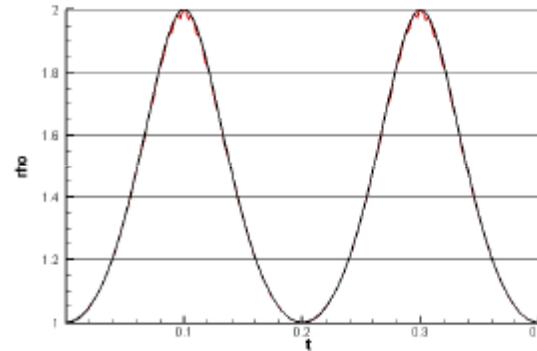
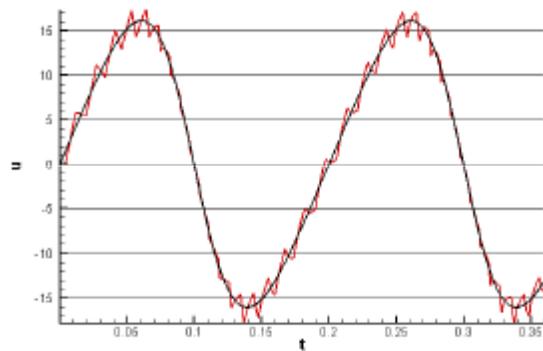
$T = 0.05$



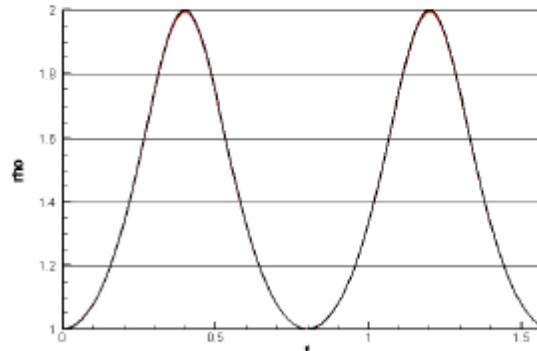
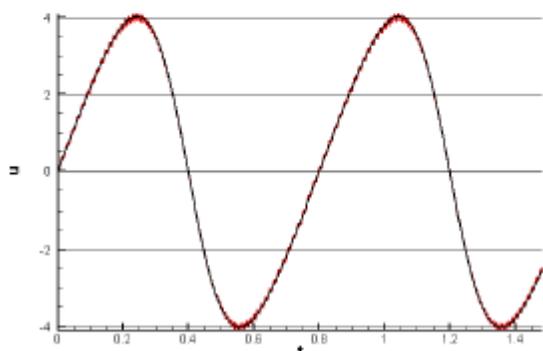
$T = 0.1$



$T = 0.2$



$T = 0.8$



La solution numérique tend vers  $(\rho_e, u_e)$  quand  $M \rightarrow 0$

La différence est en  $M^2$

Pas de temps utilisé dans les simulations limité par une condition de stabilité explicite :

$$\delta t \leq \frac{\delta x}{|u| + c} = \frac{\delta x}{|u|} \cdot \frac{M}{1 + M}$$

Donc  $\delta t \rightarrow 0$  si  $M \rightarrow 0$

La simulation devient très inefficace. La condition de stabilité naturelle dans ce cas serait une condition convective :

$$\delta t \leq \frac{\delta x}{|u|}$$

### I.3. Analyse asymptotique et modèle pour les écoulements à faible Mach

Motivation pour le développement d'un modèle spécifiquement adapté aux écoulements à faible Mach : enlever l'acoustique, qui reste toujours présente dans le modèle compressible.

On prend en compte l'effet global de l'acoustique, mais on ne la résout plus  $\Rightarrow$  on s'affranchit de la condition de stabilité basée sur la vitesse du son. Seule reste la condition sur la convection (et éventuellement sur la partie visqueuse).

Etablissement du modèle basé sur les **développements asymptotiques en Mach**.

**Première étape : adimensionnement** des équations.

Grandeurs de référence :

$$x_r, \rho_r, u_r, \mu_r, k_r \quad t_r = x_r / u_r \quad e_r = p_r / \rho_r \quad T_r = p_r / (r \rho_r)$$

$$c_r = \sqrt{\gamma p_r / \rho_r} \quad M = u_r / c_r \quad Re = \frac{\rho_r u_r x_r}{\mu_r} \quad Pr = \frac{\mu_r c_p}{k_r}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\gamma M^2} \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v}) = \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\gamma M^2}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \mathbf{v}) \end{array} \right.$$

Loi d'état  $p = (\gamma - 1) \rho e = \rho T$

Energie totale  $E = e + \gamma M^2 \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$

## Développement en série de puissances de M :

$$p(\mathbf{x}, t, M) = p_0(\mathbf{x}, t, M) + Mp_1(\mathbf{x}, t, M) + M^2p_2(\mathbf{x}, t, M) + \mathcal{O}(M^3)$$

On reporte dans le système  $\Rightarrow$  **équations aux différents ordres.**

Équation de conservation de la **masse** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})_1 = 0 \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$(\rho \mathbf{v})_1 = \rho_0 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_0$$

$$(\rho \mathbf{v})_2 = \rho_0 \mathbf{v}_2 + \rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_0$$

Équation **QDM** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p_0 \\ \nabla p_1 \\ \frac{\partial \rho_0 \mathbf{v}_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0) + \frac{1}{\gamma} \nabla p_2 \end{array} \right. = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}_0) \end{array}$$

Équation d'**énergie** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_0 E_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 E_0 \mathbf{v}_0 + p_0 \mathbf{v}_0) \\ \frac{\partial (\rho E)_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v})_1 \\ \frac{\partial (\rho E)_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v})_2 \end{array} \right. = \begin{array}{l} \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_0) \\ \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_1) \\ \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_2) + \frac{\gamma}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}_0 \mathbf{v}_0) \end{array}$$

$$\text{QDM} \Rightarrow \begin{aligned} p_0 &= p_0(t) \\ p_1 &= p_1(t) \end{aligned}$$

On ne gagne pas d'information des termes d'ordre 1 du développement (combiner (ordre 0)+M (ordre 1) )

Donc on peut aussi bien partir du développement :

$$p(\mathbf{x},t,M) = p_0(\mathbf{x},t,M) + M^2 p_2(\mathbf{x},t,M) + \mathcal{O}(M^3)$$

Équation d'état à l'ordre 0 :

$$p_0(t) = \rho_0(\mathbf{x},t)T_0(\mathbf{x},t)$$

$$\text{ou en énergie totale } p_0 = (\gamma - 1)\rho_0 E_0$$

En utilisant cette équation d'état, l'équation d'énergie à l'ordre 0 devient :

$$\frac{dp_0}{dt} + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = \frac{\gamma}{RePr} \nabla \cdot (k \nabla T_0)$$

contrainte sur le champ de vitesse

Ou, en utilisant la continuité à l'ordre 0 :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho_0 \left( \frac{\partial T_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla T_0 \right) - \frac{dp_0}{dt} = \frac{\gamma}{(\gamma - 1) RePr} \nabla \cdot (k \nabla T_0)$$

équation d'évolution pour la température

Systeme limite pour les écoulements faible Mach :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) - \frac{dP_0}{dt} = \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T) \end{array} \right.$$

loi d'état

$$P_0(t) = \rho(\mathbf{x}, t) T(\mathbf{x}, t)$$

Remarques :

- On a maintenant 2 pressions, d'ordres de grandeur très différents.
- Pression thermodynamique qui intervient dans la loi d'état mais pas dans l'équation QDM, donc pas de mécanisme de propagation d'ondes.
- Pression dynamique qui n'est pas reliée à la masse volumique, et devient un paramètre permettant de satisfaire la contrainte sur le champ de vitesse.
- Le cas strictement incompressible est un cas particulier .
- La nature mathématique du système a changé : en fluide parfait on passe d'un système hyperbolique à un système mixte hyperbolique-elliptique (pas d'équation d'évolution pour la pression dynamique).

Equation pour la pression  $P_0$  , uniforme :  
intégration de l'équation d'énergie sur le domaine

$$\frac{dP_0}{dt} \int_V dV + \gamma P_0 \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{\gamma}{RePr} \int_{\partial V} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA$$

Si le domaine est ouvert la pression  $P_0$  est  
la pression ambiante, constante.

## II. Méthodes numériques.

### II.1. Méthodes numériques pour le compressible

Difficultés centrales en fortement compressible :

- **Conservativité** pour le calcul des ondes de choc
- Capacité à résoudre les **discontinuités** de manière non oscillante
- Coexistence de discontinuités et de petites structures régulières

Les termes diffusifs des équations NS ne posent pas de problème particulier (discrétisation par des formules centrées standard) : on ne s'intéresse ici qu'aux équations d'Euler

## Cas 1D

### Discrétisation

Grille uniforme  $\{x_j\}_{j=1,\dots,J}$   $\delta x = x_{j+1} - x_j$

Pas de temps  $\delta t = t^{n+1} - t^n$

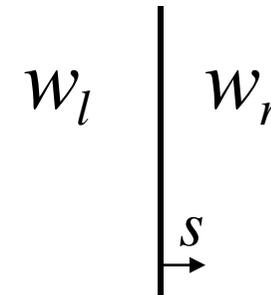
$W_j^n$  solution numérique en  $(x_j, t^n)$

## Conservation

Ondes de choc : les **relations de saut** (Rankine Hugoniot) doivent être vérifiées à travers le choc.

Euler 1D :

$$f(w_r) - f(w_l) = s(w_r - w_l)$$



$$\begin{cases} \rho_r u_r - \rho_l u_l = s(\rho_r - \rho_l) \\ \rho_r u_r^2 + p_r - \rho_l u_l^2 - p_l = s(\rho_r u_r - \rho_l u_l) \\ \rho_r E_r u_r + p_r u_r - \rho_l E_l u_l - p_l u_l = s(\rho_r E_r - \rho_l E_l) \end{cases}$$

Seule forme des équations adéquate pour la prise en compte automatique des chocs : **forme conservative**, ie sous forme de divergence. En 1D :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0$$

De plus la méthode numérique doit aussi être conservative, ie s'écrire sous la forme :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{\delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

$$F_{j+1/2} = F(W_{j-p}^n, \dots, W_{j+q}^n) \quad \text{flux numérique}$$

Le flux numérique peut aussi dépendre de valeurs à l'instant n+1 (schéma implicite)

## Théorème fondamental :

THÉORÈME (LAX ET WENDROFF) : *Soit une suite de grilles  $l = 1, 2, \dots$  associées à des pas d'espace et de temps  $\delta x_l, \delta t_l \rightarrow 0$  si  $l \rightarrow \infty$ . Soit  $W_l(x, t)$  la solution numérique calculée en utilisant une méthode consistante et conservative sur la grille  $l$ . Supposons que  $W_l$  converge vers une fonction  $w$  quand  $l \rightarrow \infty$ , dans un sens à préciser. Alors  $w(x, t)$  est une solution faible de la loi de conservation.*

Une solution faible est une solution au sens classique si elle est régulière, et qui satisfait les relations de saut à travers les discontinuités.

La méthode est consistante si  $F(U, \dots, U) = f(U)$

Le calcul de chocs corrects (vitesse, saut des grandeurs) est donc assuré par l'emploi d'une méthode conservative

Schémas conservatifs pour Euler 1D : schémas de base

- Ordre 1 : schéma de Roe (décentré)
- Ordre 2 : schéma de Lax-Wendroff (centré)

## Schéma de Roe

Le décentrement est fait relativement à l'orientation des courbes caractéristiques : décentrement suivant le signe des valeurs propres de la matrice jacobienne.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad A(w) = \frac{df}{dw} = A^+(w) + A^-(w)$$

Pour Euler 1D :  $\lambda_i = (u - c, u, u + c)$

Donc le décentrement dépend du sens de l'écoulement et du régime, supersonique ou subsonique

Dans le cas où  $A = \text{cte}$ , schéma décentré d'ordre 1 :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{\delta x} A^+ (W_j^n - W_{j-1}^n) - \frac{\delta t}{\delta x} A^- (W_{j+1}^n - W_j^n)$$

$$A^\pm = R \Lambda^\pm R^{-1} \quad \Lambda^\pm = \text{diag}(\lambda_l^\pm) \quad \lambda_l^\pm = \frac{1}{2} (\lambda_l \pm |\lambda_l|)$$

Problème dans le cas non linéaire : extension possible

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{\delta x} A_j^+ (W_j^n - W_{j-1}^n) - \frac{\delta t}{\delta x} A_j^- (W_{j+1}^n - W_j^n) \quad A_j^\pm = A^\pm(W_j^n)$$

Schéma non conservatif (pas de flux numérique possible)

Idée (Roe 1981) : décomposer plutôt un flux

$$\delta f_{j\pm 1/2} = \delta f_{j\pm 1/2}^+ + \delta f_{j\pm 1/2}^-$$

notations

$$f_j = f(W_j)$$

$$\delta f_{j+1/2} = f_{j+1} - f_j$$

en introduisant la notion de matrice moyenne  $\tilde{A}$  tq:

$$\delta f = \tilde{A} \delta W$$

alors , si  $\tilde{A}$  est diagonalisable on peut définir  $\tilde{A}^+$  et  $\tilde{A}^-$  et :

$$\delta f^+ = \tilde{A}^+ \delta W$$

$$\delta f^- = \tilde{A}^- \delta W$$

Le décentrement s'écrit alors sous forme de différences de flux (schéma « Flux Difference Splitting », FDS)

Si maintenant on écrit le schéma :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{\delta x} \tilde{A}_{j-1/2}^+ \delta W_{j-1/2}^n - \frac{\delta t}{\delta x} \tilde{A}_{j+1/2}^- \delta W_{j+1/2}^n$$

Équivalent à :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{\delta x} \delta f_{j-1/2}^+ - \frac{\delta t}{\delta x} \delta f_{j+1/2}^-$$

Ce schéma est conservatif, flux numérique :

$$\begin{aligned} F_{j+1/2} &= f_j^{n,+} + f_{j+1}^{n,-} = \frac{1}{2} (f_j^n + f_{j+1}^n) + \frac{1}{2} (f_j^{n,+} - f_j^{n,-}) + \frac{1}{2} (f_{j+1}^{n,-} - f_{j+1}^{n,+}) \\ &= \frac{1}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_{j+1/2}| \delta W_{j+1/2}^n \end{aligned}$$

Reste à construire la matrice moyenne  $\tilde{A}$

A priori  $\tilde{A}_{j+1/2}$  dépend de  $(W_j^n, W_{j+1}^n)$  (schéma à 3 points)

Conditions que doit vérifier la matrice moyenne :

- 1)  $\delta f_{j+1/2} = \tilde{A}_{j+1/2} \delta W_{j+1/2}$
- 2)  $\tilde{A}_{j+1/2}(W_j, W_j) = A_j$
- 3)  $\tilde{A}_{j+1/2}$  diagonalisable dans  $\mathbb{R}$

Dans le cas linéaire,  $\tilde{A}_{j+1/2} = A$

Dans le cas des équations d'Euler, Roe (1981) a montré que la matrice moyenne peut être la matrice jacobienne d'un certain état moyen  $\tilde{W}_{j+1/2}^n$  :

$$\tilde{A}_{j+1/2} = \tilde{A}(W_j^n, W_{j+1}^n) = A(\tilde{W}_{j+1/2}^n)$$

L'état moyen  $\tilde{W}_{j+1/2}^n$  est défini par :  $\tilde{\rho}_{j+1/2}^n = \sqrt{\rho_j^n \rho_{j+1}^n}$

$$\tilde{u}_{j+1/2}^n = \frac{\sqrt{\rho_j^n} u_j^n + \sqrt{\rho_{j+1}^n} u_{j+1}^n}{\sqrt{\rho_j^n} + \sqrt{\rho_{j+1}^n}} \quad \tilde{H}_{j+1/2}^n = \frac{\sqrt{\rho_j^n} H_j^n + \sqrt{\rho_{j+1}^n} H_{j+1}^n}{\sqrt{\rho_j^n} + \sqrt{\rho_{j+1}^n}}$$

$$\tilde{A}_{j+1/2}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\gamma-1}{2} \tilde{u}_{j+1/2}^2 & (3-\gamma) \tilde{u}_{j+1/2} & \gamma-1 \\ \left( \frac{\gamma-1}{2} \tilde{u}_{j+1/2}^2 - \tilde{H}_{j+1/2} \right) \tilde{u}_{j+1/2} & \tilde{H}_{j+1/2} - (\gamma-1) \tilde{u}_{j+1/2}^2 & \tilde{\mu}_{j+1/2} \end{bmatrix}$$

## Schéma de Lax-Wendroff

Construction du schéma à partir d'un développement de Taylor en temps tronqué à l'ordre 2 :

$$w(x_j, t + \delta t) = w(x_j, t) + \delta t w_t(x_j, t) + \frac{\delta t^2}{2} w_{tt}(x_j, t)$$

$w$  vérifie le système exact  $w_t + f_x = 0$

$$w_t = -f_x$$

$$w_{tt} = -f_{xt} = -f_{tx} = -(Aw_t)_x = (Af_x)_x = (A^2 w_x)_x$$

Remplacer les d° temporelles par d° spatiales, + discrétisation centrée en espace => ordre 2 en temps et espace

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{2\delta x} (f_{j+1} - f_{j-1})^n + \frac{\delta t^2}{2\delta x^2} \left[ A_{j+1/2}^2 (W_{j+1} - W_j) - A_{j-1/2}^2 (W_j - W_{j-1}) \right]^n$$

Flux numérique :

$$F_{j+1/2} = \frac{1}{2} (f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{\delta t}{2\delta x} A_{j+1/2}^2 (W_{j+1}^n - W_j^n)$$

On peut prendre  $A_{j+1/2} = \frac{1}{2} (A(w_j^n) + A(w_{j+1}^n))$

ou  $A_{j+1/2} = \tilde{A}_{j+1/2}$  (moyenne de Roe)

Ces 2 schémas ne diffèrent que par leur partie dissipative :

$$F_{j+1/2}^{Roe} = \frac{1}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_{j+1/2}| \delta W_{j+1/2}^n$$

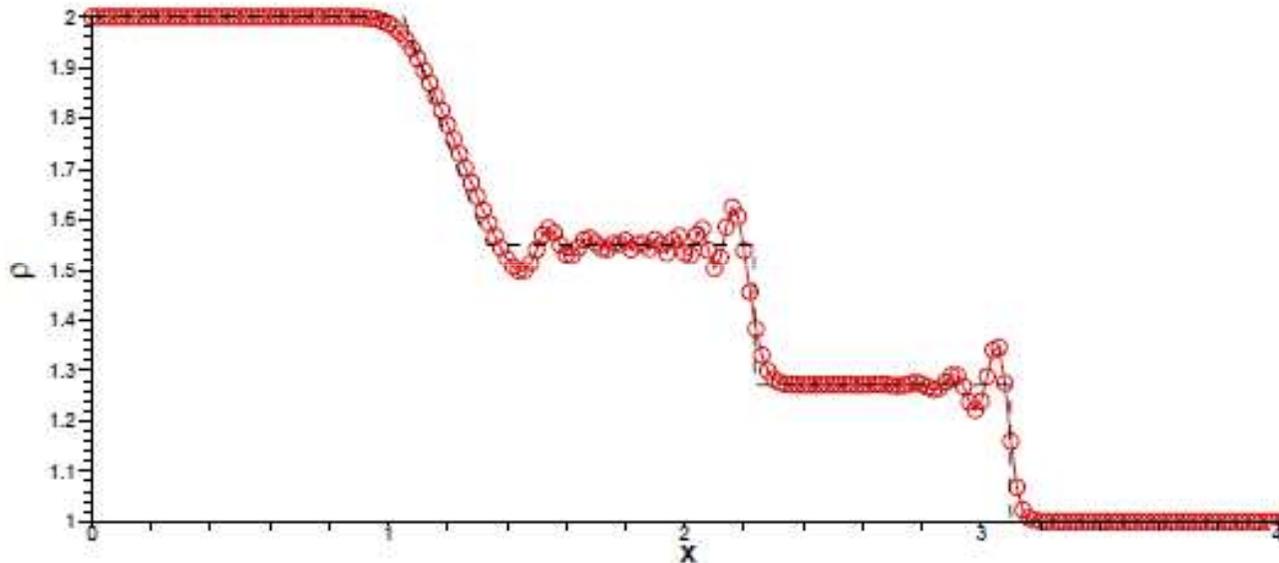
$$F_{j+1/2}^{LW} = \underbrace{\frac{1}{2} (f_j^n + f_{j+1}^n)}_{\text{schéma centré}} - \underbrace{\frac{\delta t}{2\delta x} A_{j+1/2}^2 (W_{j+1}^n - W_j^n)}_{\text{dissipation}}$$

Ils sont stables tous les 2 sous condition CFL :

$$\delta t \leq \frac{\delta x}{\max \lambda_j^l} = \frac{\delta x}{\max (|u_j| + c_j)}$$

## Traitement des discontinuités

Présence de discontinuités dans la solution numérique :  
phénomène de Gibbs associé aux schémas d'ordre  $\geq 2$



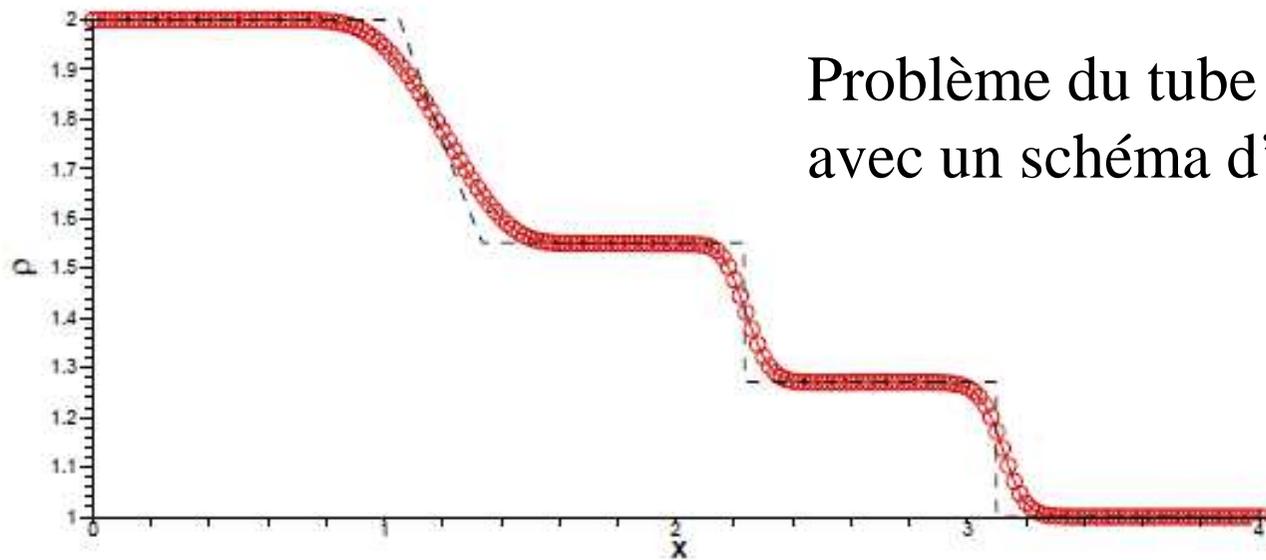
Problème du tube à choc résolu avec un schéma d'ordre 2 (LW)

Nécessité d'utiliser des schémas d'ordre élevé pour résoudre les petites structures d'un écoulement.

Oscillations parasites au voisinage des discontinuités  $\Rightarrow$  manque de robustesse, « pollution » de la solution.

Comment éviter le développement d'oscillations parasites au voisinage des discontinuités ?

Remarque : les schémas d'ordre 1 ne présentent pas cette pathologie (erreur dissipative dominante)



Problème du tube à choc résolu avec un schéma d'ordre 1 (Roe)

## Schémas à « capture de choc », d'ordre élevé, non oscillants

Approches possibles :

- Ajout d'une viscosité artificielle, non linéaire (Von Neuman 1950)
- Schémas « TVD » (Van Leer, Harten 70-80's)
- Schémas ENO/WENO (Harten 87)

On présente ici la construction d'un schéma TVD d'ordre 2.

Principe de base : reproduire la propriété de la sol. exacte d'être à « Variation Totale Décroissante » dans le cas scalaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0 \\ w(x,0) = w^0(x) \end{cases} \quad x, w \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$S(t) \text{ opérateur solution : } w(.,t) = S(t)w^0 \quad t > 0$$

$S(t)$  possède les propriétés suivantes :

- il est **monotone** :

$$\tilde{w}^0 > w^0 \text{ p.p.} \Rightarrow S(t)\tilde{w}^0 > S(t)w^0 \text{ p.p.}$$

- il est **V.T.D.** :

$$TV(S(t)w^0) \leq TV(w^0)$$

avec  $TV(w^0) = \sup_{\Delta} \sum_j |w^0(x_{j+1}) - w^0(x_j)|$   $\Delta$  ens. subd. droite réelle

$S$  opérateur discret  $W_j^{n+1} = S(W^n)_j$

- il est **monotone** si :

$$\tilde{W}_j^n > W_j^n \Rightarrow \tilde{W}_j^{n+1} > W_j^{n+1} \quad \forall j$$

- il est **V.T.D.** si :

$$TV(W^{n+1}) \leq TV(W^n)$$

avec  $TV(W) = \sum_j |W_{j+1} - W_j|$

Schéma monotone  $\Rightarrow$  schéma TVD  $\Rightarrow$  schéma préservant la monotonie

## Quelques résultats :

- un schéma monotone est précis au plus à l'ordre 1 (Lax)
- un schéma à 3 points TVD est précis au plus à l'ordre 1
- dans le cas linéaire, un schéma linéaire et préservant la monotonie est au plus précis à l'ordre 1 (Godunov)

Donc un schéma TVD est au moins à 5 points et non linéaire

Forme incrémentale  $W_j^{n+1} = W_j^n - C_{j-1}(W_j^n - W_{j-1}^n) + D_j(W_{j+1}^n - W_j^n)$

**Théorème (Harten) :** pour que le schéma incrémental soit TVD, il suffit que l'on ait  $\forall j$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_j \geq 0 \\ D_j \geq 0 \\ C_j + D_j \leq 1 \end{array} \right.$$

Cas scalaire linéaire  $f(w) = aw$

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{\delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

Cas  $a > 0$  :

Choix  $C_{j-1} = \frac{\delta t}{\delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) / (W_j^n - W_{j-1}^n), \quad D_j = 0$

Le schéma est TVD si :

$$0 \leq \frac{\delta t}{\delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) / (W_j^n - W_{j-1}^n) \leq 1 \quad \forall j$$

Principe de construction des schéma TVD classiques d'ordre 2 (limiteur de flux) :

$$F_{j+1/2}^{TVD} = F_{j+1/2}^1 + \phi_j (F_{j+1/2}^2 - F_{j+1/2}^1)$$

$F_{j+1/2}^1$  ( $F_{j+1/2}^2$ ) flux numérique d'un schéma d'ordre 1 (2)

$\phi_j$  est le **limiteur de flux**

$$\phi_j = \phi_j(r_j) \quad r_j = \frac{W_j^n - W_{j-1}^n}{W_{j+1}^n - W_j^n}$$

zones régulières  $r_j = 1 - \delta x \frac{W_{xx}}{W_x} \Big|_j + O(\delta x^2)$

La méthode de limiteur de flux est consistante avec l'équation d'advection si le limiteur est borné, et précise à l'ordre 2 sur les solutions régulières et en dehors des extrema si  $\phi(1) = 1$  et  $\phi$  a une dérivée à gauche et à droite en  $r=1$

Choix  $F_{j+1/2}^1 = aW_j^n$  Roe

$F_{j+1/2}^2 = aW_j^n + \frac{1-\nu}{2} a(W_{j+1}^n - W_j^n)$  Lax-Wendroff

$\nu = a\delta t / \delta x$  CFL

$F_{j+1/2}^{TVD} = aW_j^n + \phi_j \frac{1-\nu}{2} a(W_{j+1}^n - W_j^n)$

Conditions de Harten  $\Rightarrow$  :

$$-\frac{2}{1-\nu} \leq \frac{\phi_j}{r_j} - \phi_{j-1} \leq \frac{2}{\nu}$$

On impose :  $\phi_j(r_j) = 0$  si  $r_j \leq 0$  (extremum)

$$\text{Conditions TVD : } \begin{cases} \phi(r) = 0 & r \leq 0 \\ \phi(r) \leq \frac{2}{\nu} r \\ \phi(r) \leq \frac{2}{1-\nu} \end{cases}$$

avec  $0 \leq \nu \leq 1$  (stabilité)

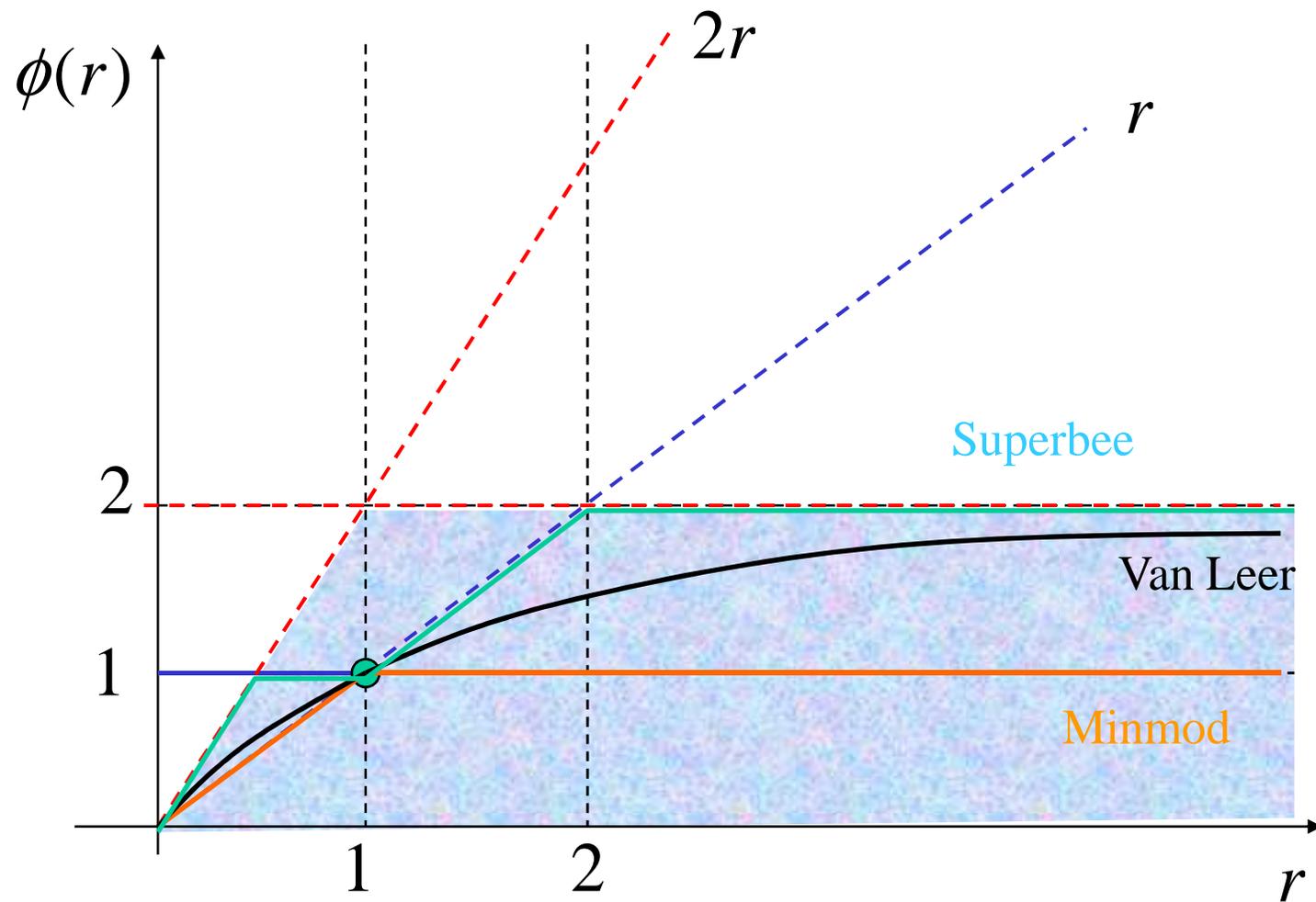
Indépendant de  $\nu$  (limiteurs classiques) :

$$\begin{cases} \phi(r) \leq 2r \\ \phi(r) \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{minmod} = \max(0, \min(1, r))$$

$$\text{superbee} = \max(0, \min(1, 2r), \min(2, r))$$

$$\text{VanLeer} = (r + |r|) / (1 + r)$$

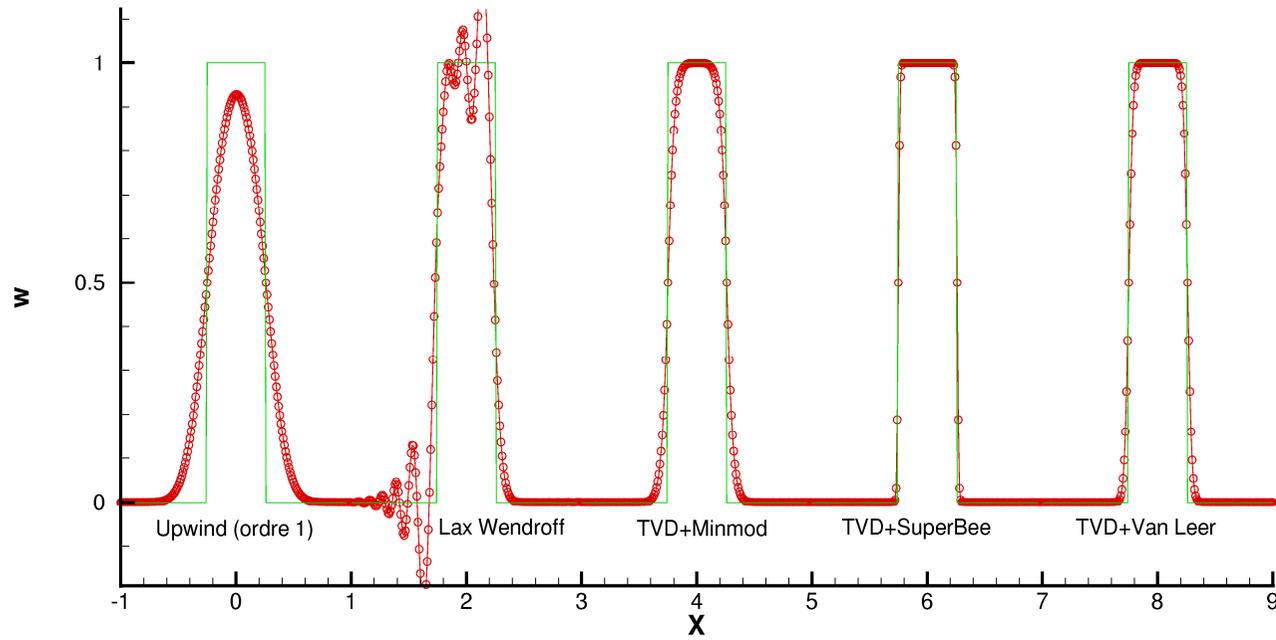


Généralisation cas  $a \in \mathfrak{R}$  :

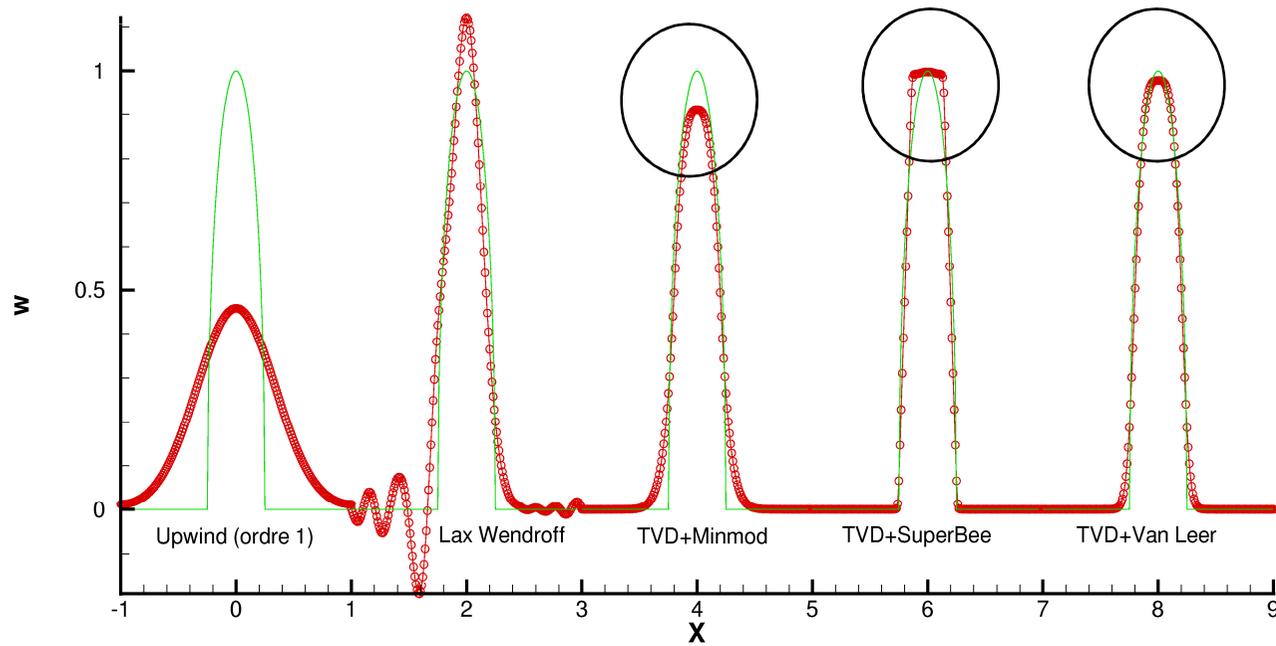
$$\begin{aligned}
 F_{j+1/2}^{TVD} &= F_{j+1/2}^1 - \phi(r_j) |a| \frac{1 - |\nu|}{2} (W_{j+1}^n - W_j^n) \\
 F_{j+1/2}^1 &= \frac{1}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2} |\nu| (W_{j+1}^n - W_j^n) \\
 r_j &= \begin{cases} r_j^+ = \frac{W_j^n - W_{j-1}^n}{W_{j+1}^n - W_j^n} & \text{si } a > 0 \\ r_j^- = \frac{W_{j+2}^n - W_{j+1}^n}{W_{j+1}^n - W_j^n} & \text{si } a < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Extension au cas scalaire non linéaire directe suivant le même principe

# Comportement des limiteurs



# Clipping des extrema



Extension aux systèmes :

Problème conceptuel : la solution exacte d'un problème hyperbolique non linéaire n'est pas TVD (c'est une notion scalaire)

Extension « scalaire » sur les champs caractéristiques (diagonalisation locale du flux numérique)

$$F_{j+1/2} = \sum_k f_{j+1/2}^k r_{j+1/2}^k$$

$$F_{j+1/2}^1 = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_{j+1/2}| (W_{j+1}^n - W_j^n) \quad \text{Lax-Wendroff}$$

$$F_{j+1/2}^2 = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta x} \tilde{A}_{j+1/2} (f_{j+1}^n - f_j^n) \quad \text{Roe}$$

$$(R^{-1}F^{TVD})_{j+1/2}^k = (R^{-1}F^1)_{j+1/2}^k + \frac{1}{2} \phi_j^k (|\lambda^k| (1 - \left| \frac{\delta t}{\delta x} \lambda^k \right|) \delta V^k)_{j+1/2}$$

$$\delta V_{j+1/2} = R_{j+1/2}^{-1} (W_{j+1}^n - W_j^n)$$

$V$  variables caractéristiques

$$\phi_j^k = \phi_j^k(r^k) \quad r^k = \begin{cases} r^{k,+} = \frac{\delta V_{j-1/2}^k}{\delta V_{j+1/2}^k} & \lambda_{j+1/2}^k > 0 \\ r^{k,-} = \frac{\delta V_{j+3/2}^k}{\delta V_{j+1/2}^k} & \lambda_{j+1/2}^k < 0 \end{cases}$$

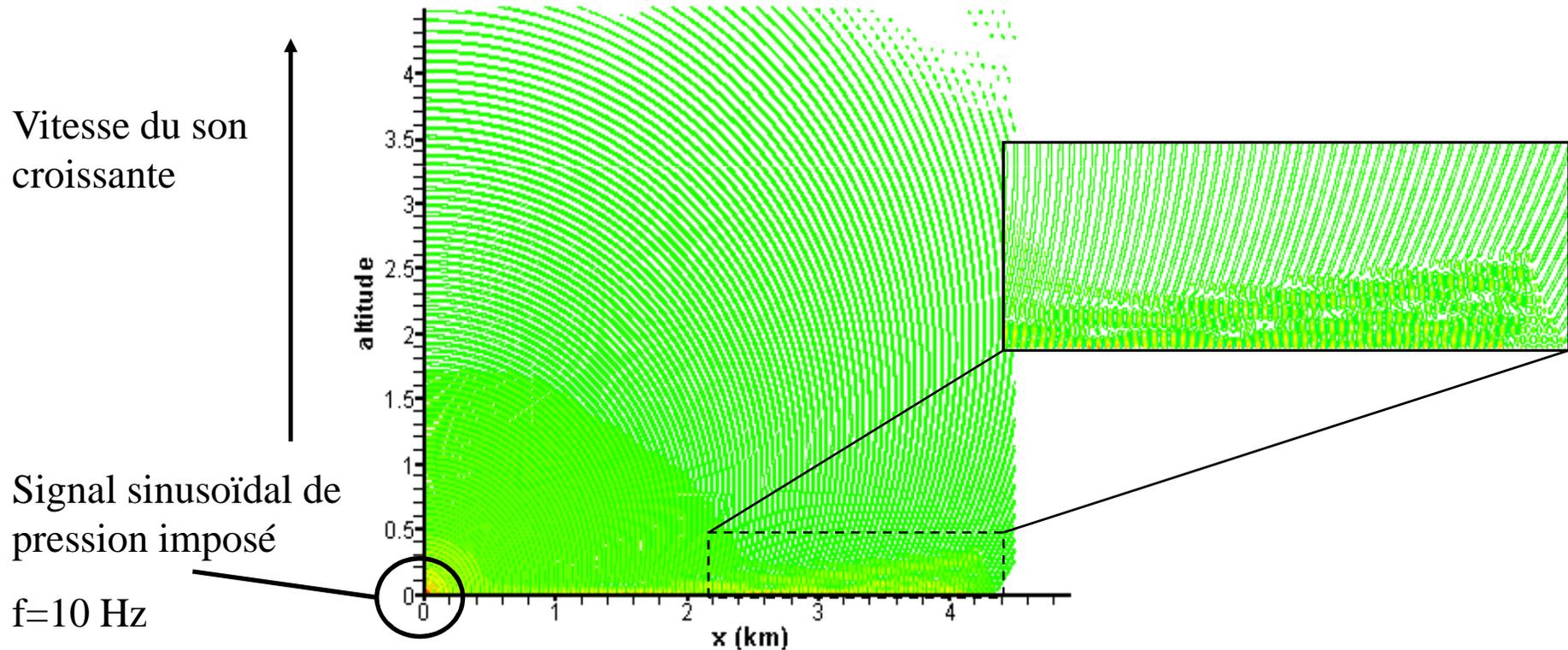
$$F_{j+1/2}^{TVD} = F_{j+1/2}^1 + \sum_p \frac{1}{2} \phi_j^k (|\lambda^k| (1 - \left| \frac{\delta t}{\delta x} \lambda^k \right|) \delta V^k \mathbf{r}^k)_{j+1/2}$$

- Extension en multiD : direction/direction, ou splitting directionnel
- Autre approche par reconstruction locale de la solution et limitation de pente
- Approche découplée espace-temps : limiter la reconstruction, et assurer la propriété TVD séparément en temps (schéma temporel TVD, ex. RK3)
- Extension aux schémas d'ordre plus élevé directe (pondération entre schéma d'ordre 1 et schéma d'ordre quelconque)
- Relaxation de la limitation aux extrema : approche MP  $\Rightarrow$  élimination efficace des oscillations parasites tout en conservant la précision aux extrema.

## Exemple d'application (sans choc) :

### Propagation d'infrasons dans l'atmosphère

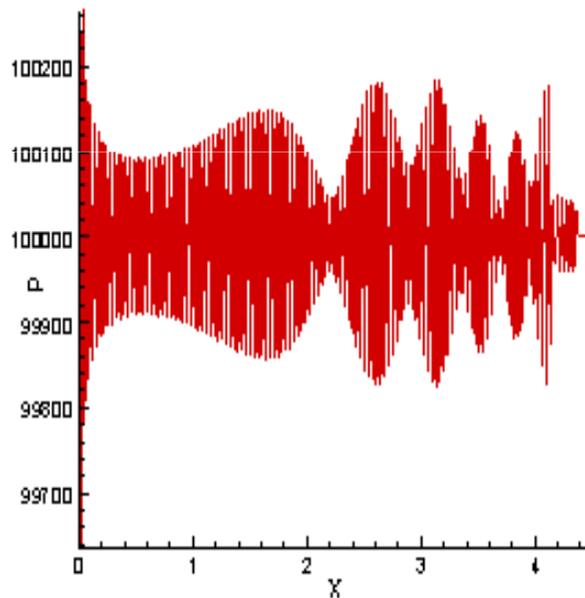
Schéma OSMP7, pression ( $\delta x = 3\text{m} \sim 11$  points/longueur d'onde)



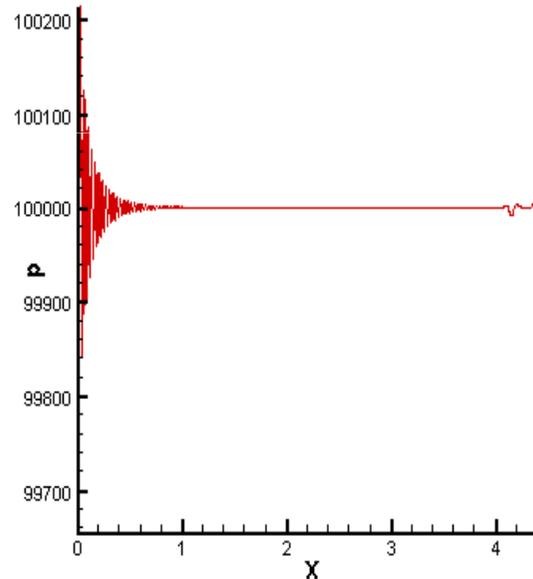
# Signal de pression au sol

Comparaison schéma OSMP7 / ordre 2 TVD ou non

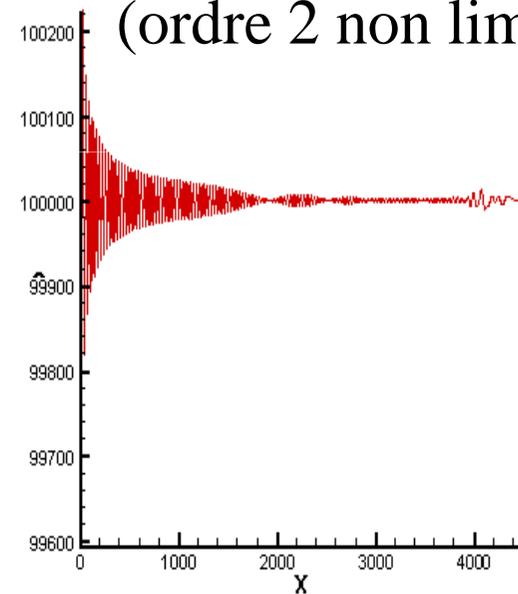
OSMP7



TVD/VanLeer



Mac Cormack  
(ordre 2 non limité)

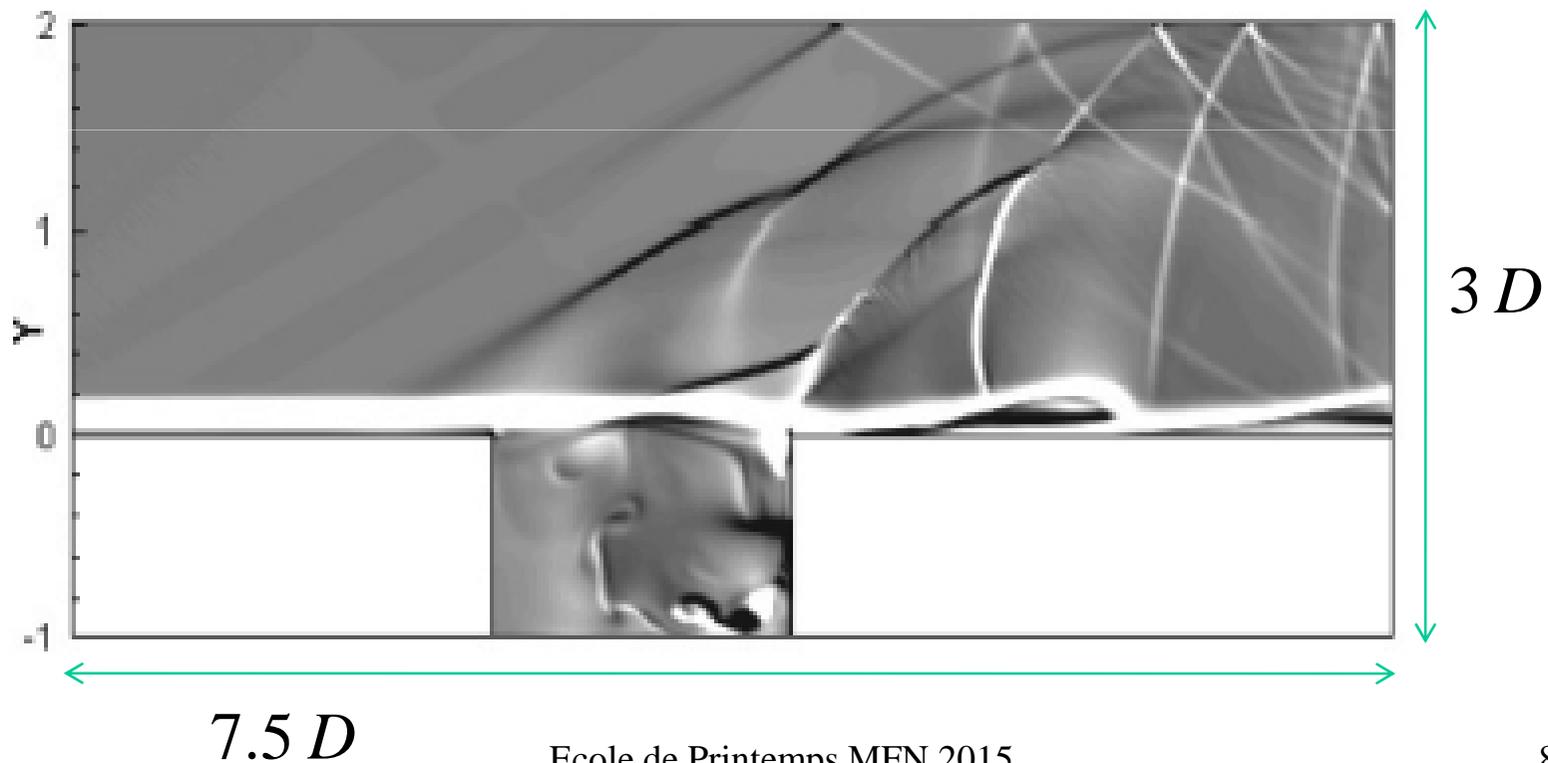


Exemple d'application (avec choc) :

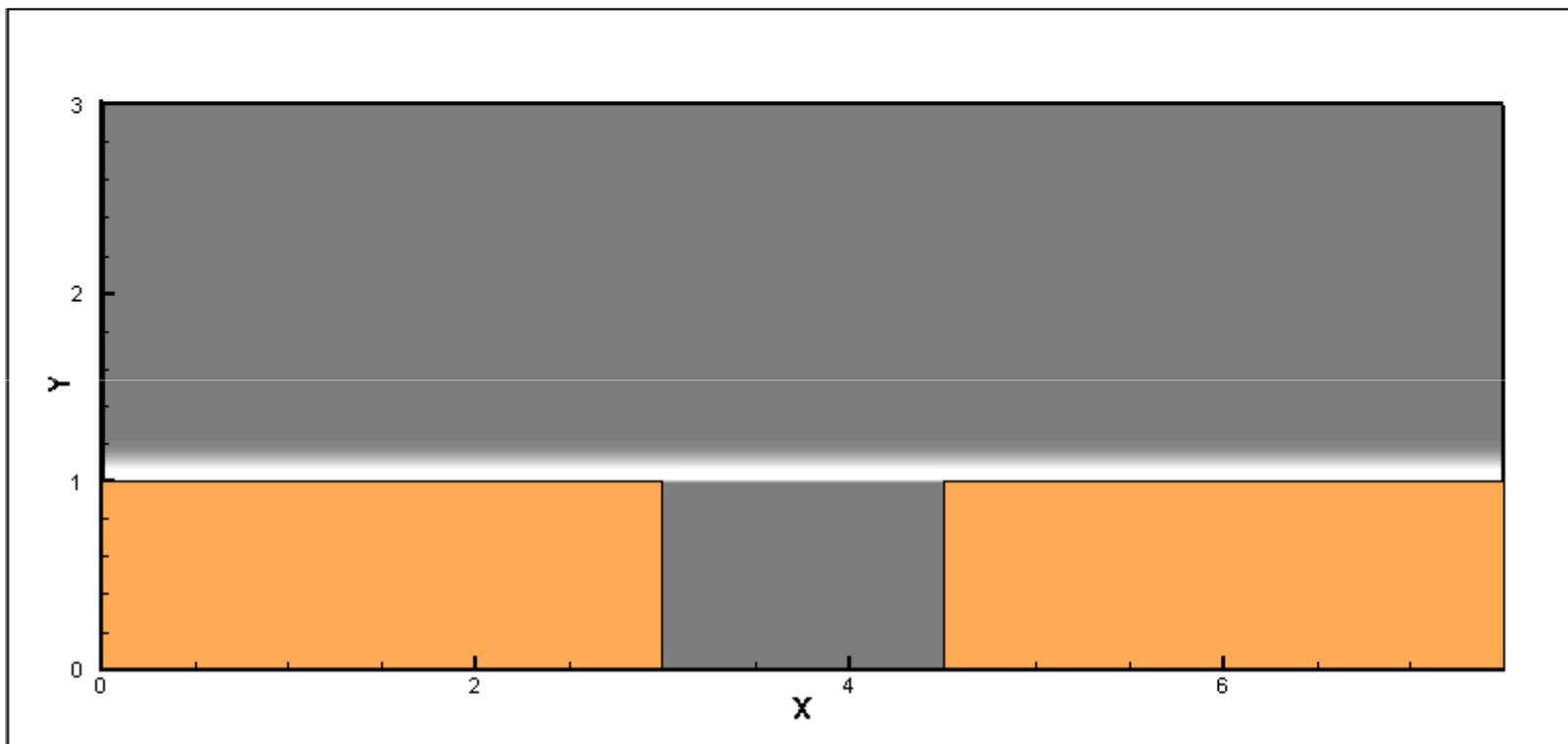
Écoulement supersonique au dessus d'une cavité

$M_\infty = 1.5$       Cavité  $L/D = 1.5$

Couche limite incidente  $\delta = D/5$



# Visualisation de $\text{div } v + \text{rot } v$



## II.2. Méthodes numériques pour les écoulements contraints

Les écoulements contraints sont une généralisation des écoulements incompressibles, de même nature mathématique.

Les composantes d'une méthode numérique pour les écoulements incompressibles se retrouvent pour les écoulements faible Mach.

## II.2.1. Ecoulements incompressibles

Equations de NS pour l'incompressible : problème dynamique

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} \end{cases}$$

Les problèmes dynamique et thermique sont découplés si la viscosité est constante.

On ne considère que le problème dynamique.

Pas d'équation d'évolution pour la pression : rôle de multiplicateur de Lagrange pour assurer la contrainte  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

La pression est solution d'un problème elliptique : étape inévitable de l'inversion de grands systèmes.

Discrétisation directe des équations et résolution couplée : problème d'algèbre linéaire gigantesque

Nécessité de mettre en œuvre une procédure de découplage vitesse-pression : **méthodes de projection** ou de pas fractionnaires (années 1960, Chorin, Temam, Kim et Moin 1985).

## Principe des méthodes de projection :

- 1) calcul d'une valeur prévisionnelle de la vitesse, à divergence non nulle
- 2) projection sur le sous-espace des vecteurs à div. nulle, à travers la résolution d'une équation elliptique (de Poisson) pour la pression.

**Discrétisation spatiale** : choix de la localisation des inconnues dans le maillage.

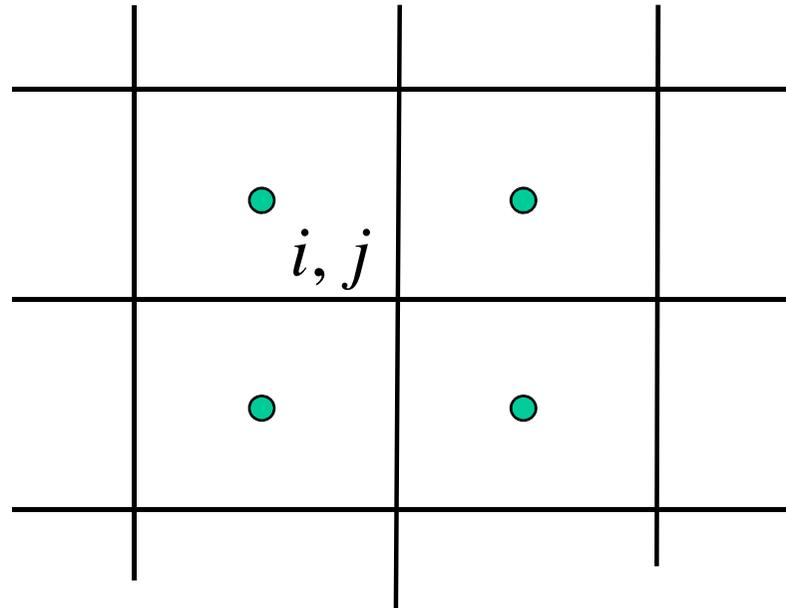
- **Maillage collocatif** : toutes les inconnues sont situées au même endroit (comme en compressible).

Inconvénient : existence possible de modes parasites « en damier » entre vitesse et pression pour discrétisation centrée.

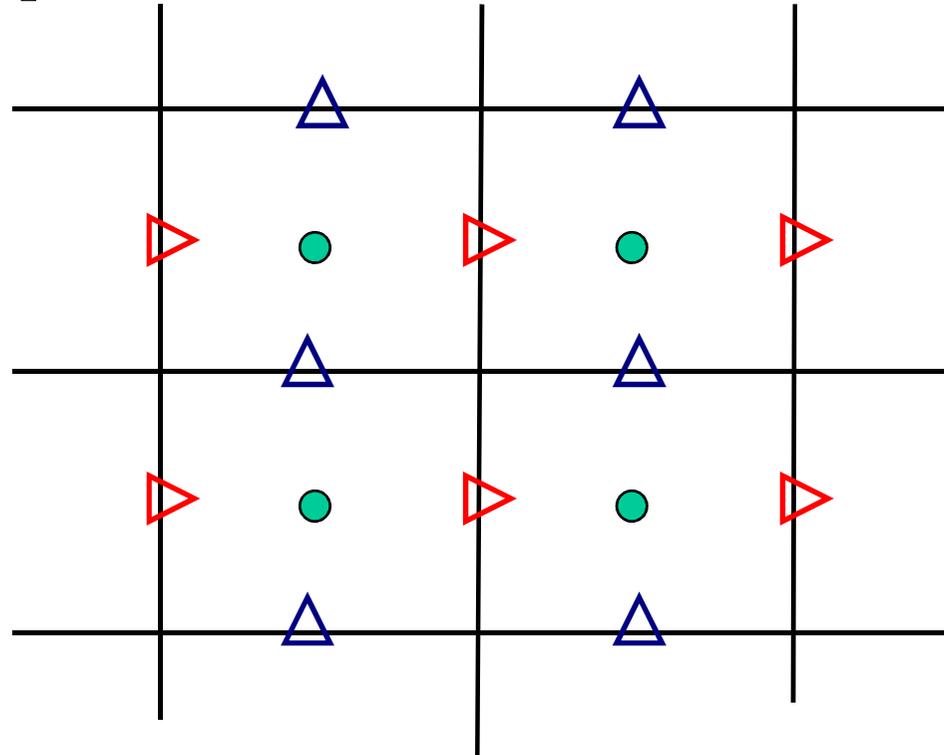
Correction possible par ex. par perturbation de l'équation de continuité (Rhie&Chow 1984).

Pas d'espace :

$\delta x, \delta y$



- **Maillage décalé** : solution naturelle et efficace au problème des modes parasites.



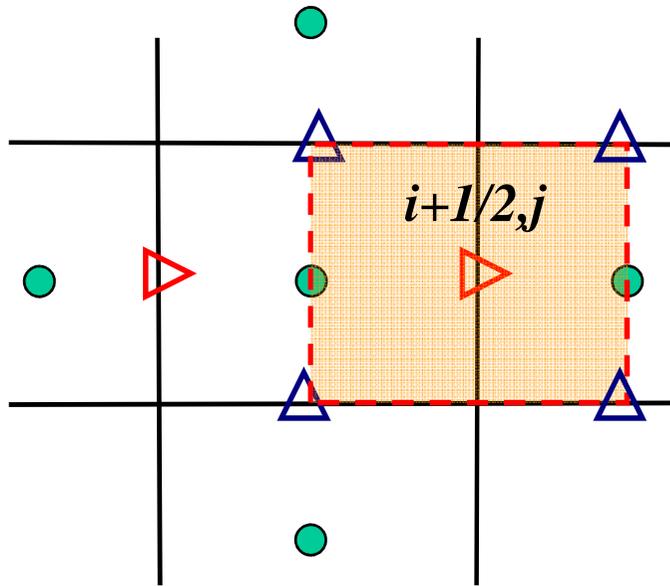
● Points pour la pression  $i, j$

▷ Points pour la composante horizontale de vitesse  $i + 1/2, j$

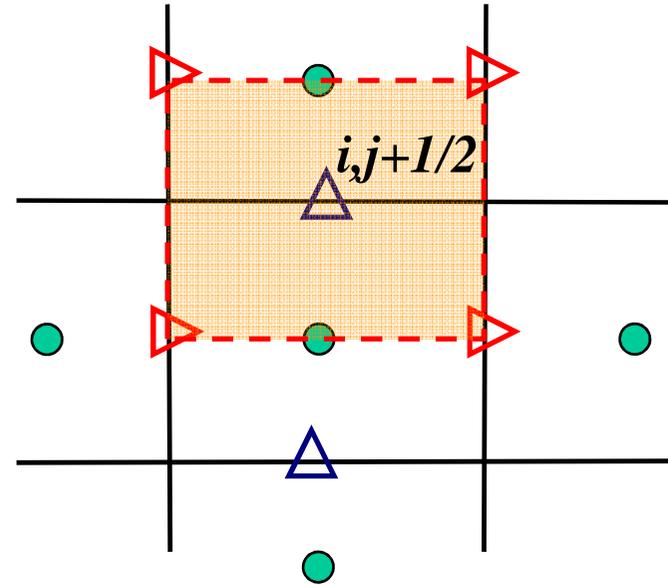
△ Points pour la composante verticale de vitesse  $i, j + 1/2$



Cellules de contrôle pour l'équation QDM :



QDM/x :  $i+1/2, j$



QDM/y :  $i, j+1/2$

Discrétisation du **gradient de pression** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_{i+1/2,j}^x p = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta x} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} + \mathcal{O}(\delta x^2) \\ \mathbf{G}_{i,j+1/2}^y p = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\delta y} = \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j+1/2} + \mathcal{O}(\delta y^2) \end{array} \right.$$

**Termes convectifs** :

$$\text{en x: } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{AD}_{i+1/2,j}^u = \frac{u_{i+3/2,j}^2 - u_{i-1/2,j}^2}{2\delta x} + \frac{(uv)_{i+1/2,j+1} - (uv)_{i+1/2,j-1}}{2\delta y} \\ = \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right)_{i+1/2,j} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2) \\ \text{avec} \\ v_{i+1/2,j} = \frac{1}{4}(v_{i,j+1/2} + v_{i+1,j+1/2} + v_{i,j-1/2} + v_{i+1,j-1/2}) \end{array} \right.$$

$$\text{en y: } \left\{ \begin{array}{l} \text{AD}_{i,j+1/2}^v = \frac{(uv)_{i+1,j+1/2} - (uv)_{i-1,j+1/2}}{2\delta x} + \frac{v_{i,j+3/2}^2 - v_{i,j-1/2}^2}{2\delta y} \\ = \left( \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2) \\ \text{avec} \\ u_{i,j+1/2} = \frac{1}{4}(u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j+1} + u_{i-1/2,j} + u_{i-1/2,j+1}) \end{array} \right.$$

Termes diffusifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{VS}_{i+1/2,j}^u = \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{\delta x^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{\delta y^2} \\ = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i+1/2,j} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2) \\ \text{VS}_{i,j+1/2}^v = \frac{v_{i,j+3/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}}{\delta x^2} + \frac{v_{i+1,j+1/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i-1,j+1/2}}{\delta x^2} \\ = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_{i,j+1/2} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2) \end{array} \right.$$

Récapitulation du **système semi-discret** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{\delta y} = 0 \\ \frac{du}{dt} \Big|_{i+1/2,j} + \mathbf{AD}_{i+1/2,j}^u + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{G}_{i+1/2,j}^x p = \nu \mathbf{VS}_{i+1/2,j}^u \\ \frac{dv}{dt} \Big|_{i,j+1/2} + \mathbf{AD}_{i,j+1/2}^v + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{G}_{i,j+1/2}^y p = \nu \mathbf{VS}_{i,j+1/2}^v \end{array} \right. \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}$$

Sous forme vectorielle :

$$D\mathbf{u} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + N(\mathbf{u}) + \frac{1}{\rho_0} G\mathbf{p} = 0$$

N opérateur discret non linéaire représentant les termes convectifs et visqueux  $N(\mathbf{u}) = AD(\mathbf{u}) - \nu VS \cdot \mathbf{u}$

G opérateur discret représentant le gradient de pression

D opérateur discret représentant la divergence

## Discretisation temporelle

Schéma Euler retardé, explicite, ordre 1 :

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = -\delta t \left( N(\mathbf{u}^n) + \frac{1}{\rho_0} G \mathbf{p}^n \right)$$

Condition de stabilité (1D) :

Convection :  $\delta t \leq \delta t_c = \delta x / \max_j |u_j|$

Diffusion :  $\delta t \leq \delta t_d = \frac{1}{2} \delta x^2 / (\mu / \rho_0)$

Global :  $\delta t \leq \min(\delta t_c, \delta t_d)$

Nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho_0 \max_j |u_j| L}{\mu}$

L longueur caractéristique du domaine

La condition de stabilité s'écrit :

$$\delta t \leq \delta t_c \min\left(1, \frac{1}{2} \frac{\delta x}{L} Re\right)$$

$\Rightarrow$  condition restrictive si  $\frac{\delta x}{L} Re$  petit

Par ex. cas faible Re et discrétisation fine

Dans ce cas il est préférable d'utiliser un schéma implicite au moins pour les termes diffusifs

## Schémas temporels d'ordre 2

Explicite : Adams-Bashforth, **AB2**

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = -\frac{1}{2}\delta t \left( 3N(\mathbf{u}^n) - N(\mathbf{u}^{n-1}) + 3\frac{1}{\rho_0}G\mathbf{p}^n - \frac{1}{\rho_0}G\mathbf{p}^{n-1} \right)$$

Schéma multipas, nécessite un autre schéma pour le démarrage.

Condition de stabilité analogue à Euler retardé

Implicite : Backward Differentiation Scheme, **BDF**

$$\frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2} = -\delta t \left( N(\mathbf{u}^{n+1}) + \frac{1}{\rho_0} G\mathbf{p}^{n+1} \right)$$

Inconditionnellement stable

Termes non linéaires difficiles à impliciter, et souvent non justifié (pas de temps convectif pour la précision)

⇒ termes convectifs obtenus par extrapolation d'ordre 2 :

$$AD(\mathbf{u}^{n+1}) = 2AD(\mathbf{u}^n) - AD(\mathbf{u}^{n-1}) + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

Schéma **extrapolated BDF** (schéma dit **IMEX**).

Condition de stabilité de type CFL-convectif.

## Forme générale des schémas :

$$M \mathbf{u}^{n+1} + \beta \delta t \frac{1}{\rho_0} G \mathbf{p}^{n+\alpha} = R^n$$

$R^n$  termes connus des pas de temps précédents

$$\begin{array}{l} \text{Euler} \\ \text{AB2} \\ \text{BDF} \end{array} \quad \alpha = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{cases} \quad M = \begin{cases} I \\ I \\ I - 2/3 \delta t \nu S \end{cases}$$

## Discrétisation du système complet

$$\begin{cases} D\mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ M\mathbf{u}^{n+1} + \beta\delta t \frac{1}{\rho_0} G\mathbf{p}^{n+\alpha} = R^n \end{cases}$$

Vitesse et pression couplées.

Découplage par méthodes de projection, basées sur la **décomposition de Hodge-Helmholtz** :

Un champ vectoriel se décompose en une composante irrotationnelle et un composante à divergence nulle, soit la somme du gradient d'un champ scalaire et du rotationnel d'un champ vectoriel.

**Méthodes de projection** : plusieurs variantes.

Principe général :

- calcul d'une première approximation  $u^*$  de  $u^{n+1}$
- projection sur le ss-espace des champs à divergence nulle

Méthode de prédiction-projection incrémentale (Goda 1979).

Première étape : calcul de la valeur prédite  $u^*$  par :

$$M\mathbf{u}^* + \beta\delta t \frac{1}{\rho_0} G\mathbf{p}^{n+\alpha-1} = R^n$$

Deuxième étape : projection.

C'est une réalisation de la décomposition HH :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^* + \beta \delta t \frac{1}{\rho_0} G(\mathbf{p}^{n+\alpha} - \mathbf{p}^{n+\alpha-1}) = 0 & (1) \\ D\mathbf{u}^{n+1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Décomposition exacte dans le cas explicite (M=I).

Cas implicite : erreur associée à la décomposition, d'ordre 2 sur la vitesse.

Calcul de la pression : appliquer l'opérateur D sur (1) et utiliser (2)

Equation pour la pression :

$$DG\delta\mathbf{p} = \frac{\rho_0}{\beta\delta t}D\mathbf{u}^*$$

avec  $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+\alpha} - \mathbf{p}^{n+\alpha-1}$ .

L'opérateur DG discrétise le laplacien. L'éq pour la pression est donc une équation de **Poisson** discrète.

Après résolution de l'éq de Poisson, mise à jour des champs de vitesse et de pression :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \beta\delta t \frac{1}{\rho_0} G\delta\mathbf{p} \\ \mathbf{p}^{n+\alpha} = \mathbf{p}^{n+\alpha-1} + \delta p \end{cases}$$

à compléter par les CL appropriées.

## Récapitulation : étapes d'un code NS incompressible en implicite :

-une éq. de Helmholtz discrète pour chaque composante de la vitesse  $\mathbf{u}^*$ . Schéma BDF2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - \frac{2}{3}\delta t \nu V S) \mathbf{u}^* = S^{n,n-1} \\ \text{avec} \\ S^{n,n-1} = \frac{4}{3}\mathbf{u}^n - \frac{1}{3}\mathbf{u}^{n-1} - \frac{2}{3}\delta t \left( \frac{1}{\rho_0} G \mathbf{p}^n + 2AD(\mathbf{u}^n) - AD(\mathbf{u}^{n-1}) \right) \end{array} \right.$$

Système tridiagonal (1D), pentadiag. (2D), heptadiag. (3D)

- une équation de Poisson discrète pour la pression

## Résolution des équations de Helmholtz

Réécriture sous forme incrémentale :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - \frac{2}{3}\delta t\nu VS)\delta\mathbf{u} = S_i^{n,n-1} \\ \text{avec} \\ \delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n \\ S_i^{n,n-1} = S_i^{n,n-1} - (I - \frac{2}{3}\delta t\nu VS)\mathbf{u}^n \end{array} \right.$$

Permet de factoriser l'opérateur multiD en séquence d'opérateurs 1D (**méthodes ADI**) en conservant une précision globale d'ordre 2  $\Rightarrow$  simplification importante, résolution d'une suite de systèmes tridiagonaux (algorithme de Thomas, résolution directe).

## Résolution de l'éq. de Poisson pour la pression

- Méthodes directes (Gauss) ou itératives (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR...
- solveurs de Poisson rapides basés sur FFT restreints à coordonnées rectangulaires.
- méthodes de gradient conjugué, GMRES.
- méthodes multigrille, associées à une méthode itérative, très efficace pour accélérer la CV.
- ...

Étape coûteuse en général

## II.2.1. Ecoulements faible Mach

Grandes variations de température dans un écoulement, ou effets de compressibilité en volume avec vitesse faible  $\Rightarrow$  la résolution du système faible Mach est une bonne alternative (sauf si on s'intéresse à l'acoustique).

**Modèle faible Mach : l'acoustique est éliminée, pas de limitation sur le pas de temps liée à la vitesse du son.**

Même nature mathématique que l'incompressible  $\Rightarrow$  adaptation des méthodes de l'incompressible. Traitement du couplage vitesse-pression de même nature.

Changements : calcul des grandeurs thermodyn. et leur couplage, modification de la contrainte sur la vitesse.

## Modèle faible Mach dimensionné

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{dP_0}{dt} \end{array} \right.$$

+ loi d'état GP  $P_0 = r \rho T$

Contrainte sur le champ de vitesse :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\gamma - 1}{\gamma P_0} \left( \nabla \cdot (k \nabla T) - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dP_0}{dt} \right) \quad (\text{CV})$$

## Calcul de la pression thermodynamique $P_0$ :

Domaine ouvert :  $P_0$  constante = P ambiante

Domaine fermé : équation intégrale sur le domaine de (CV) :

$$\frac{dP_0}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) d\Omega - \gamma P_0 \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega$$

(dernier terme nul si domaine fixe)  $P_0$  obtenue par intégration de l'éq. d'état :

$$P_0 = \frac{rM}{\int_{\Omega} \frac{1}{T} d\Omega}$$

M masse totale du fluide

## Couplage du modèle dynamique et thermique

Résolution de l'éq. pour T.

Couplage de  $\rho$  et de T à travers la loi d'état  $\Rightarrow$  algorithme de découplage (sauf méthodes itératives).

Différents algos dans la littérature.

Discrétisation de l'équation pour T : terme convectif non conservatif à l'ordre 2

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T|_{i,j} \approx \frac{1}{2}(u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}) \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\delta x} + \frac{1}{2}(v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}) \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\delta y}$$

Utilisation d'un schéma extrapolated BDF pour impliciter le terme de conduction de chaleur

Couplage vitesse-pression dynamique : **étape de projection.**

Différence avec le cas incompressible : on a maintenant

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = S$$

$S$  terme source.

Projection :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^* + \beta \delta t \frac{1}{\rho^{n+1}} G \delta \mathbf{p} = 0 \\ D\mathbf{u}^{n+1} = S^{n+1} \end{cases}$$

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+\alpha} - \mathbf{p}^{n+\alpha-1}$$

**$\Rightarrow$  2 variantes de l'étape de l'équation de Poisson.**

Variante P1 :

$$DG\delta\mathbf{p} = -\frac{1}{\beta\delta t} (D(\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1}) - D(\rho^{n+1}\mathbf{u}^*))$$

Éq. de continuité discrète

$$D(\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1}) = -\frac{\partial\rho^{n+1}}{\partial t}$$

$\frac{\partial\rho^{n+1}}{\partial t}$  discrétisé suivant le sch. temporel choisi

⇒ éq. de Poisson à coefficients constants

Variante P2 :

$$D \frac{1}{\rho^{n+1}} G \delta \mathbf{p} = - \frac{1}{\beta \delta t} (S^{n+1} - D \mathbf{u}^*)$$

$S^{n+1}$  et  $\rho^{n+1}$  estimés au préalable

⇒ **éq. de Poisson à coefficients variables**

Continuité des flux aux interfaces de cellules :

$$\frac{2}{\rho_{i+1/2,j}^{n+1}} = \frac{1}{\rho_{i,j}^{n+1}} + \frac{1}{\rho_{i+1,j}^{n+1}}$$

## Algorithme global de résolution

### - Prédiction :

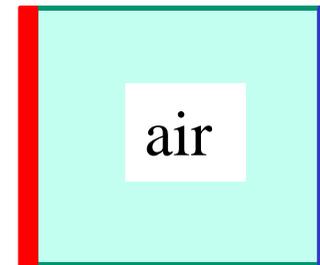
- Estimation de la masse volumique et de  $\frac{dP_0}{dt}$  en  $t^{n+1}$  par extrapolation linéaire :  
$$\rho^* = 2\rho^n - \rho^{n-1}, \quad \frac{dP_0}{dt}^* = 2\frac{dP_0}{dt}^n - \frac{dP_0}{dt}^{n-1}.$$
- Calcul de la température  $T^{n+1}$
- Connaissant  $T^{n+1}$ , calcul de  $P_0^{n+1}$  et  $\frac{dP_0}{dt}^{n+1}$
- Mise à jour de la masse volumique par la loi d'état :  $\rho^{n+1} = P_0^{n+1} / (rT^{n+1})$ .
- Estimation  $\mathbf{v}^*$  du champ de vitesse à partir de l'équation de quantité de mouvement

- **Projection :**

- Calcul du terme source de l'équation de Poisson (variante P1 ou P2).
- Résolution de l'équation de Poisson.
- Mise à jour de la vitesse et de la pression :

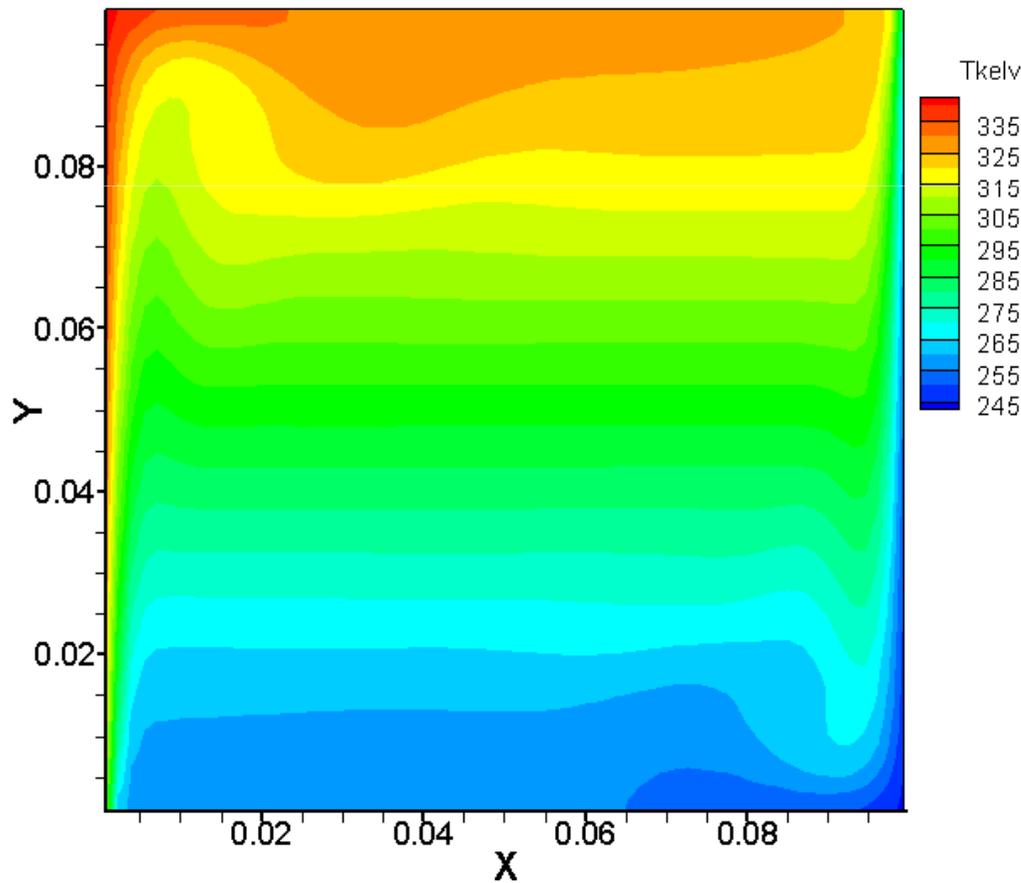
$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \beta \delta t \frac{1}{\rho^{n+1}} G \delta \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^{n+\alpha} = \mathbf{p}^{n+\alpha-1} + \delta p \end{cases}$$

Exemple d'application :  
cavité différentiellement chauffée

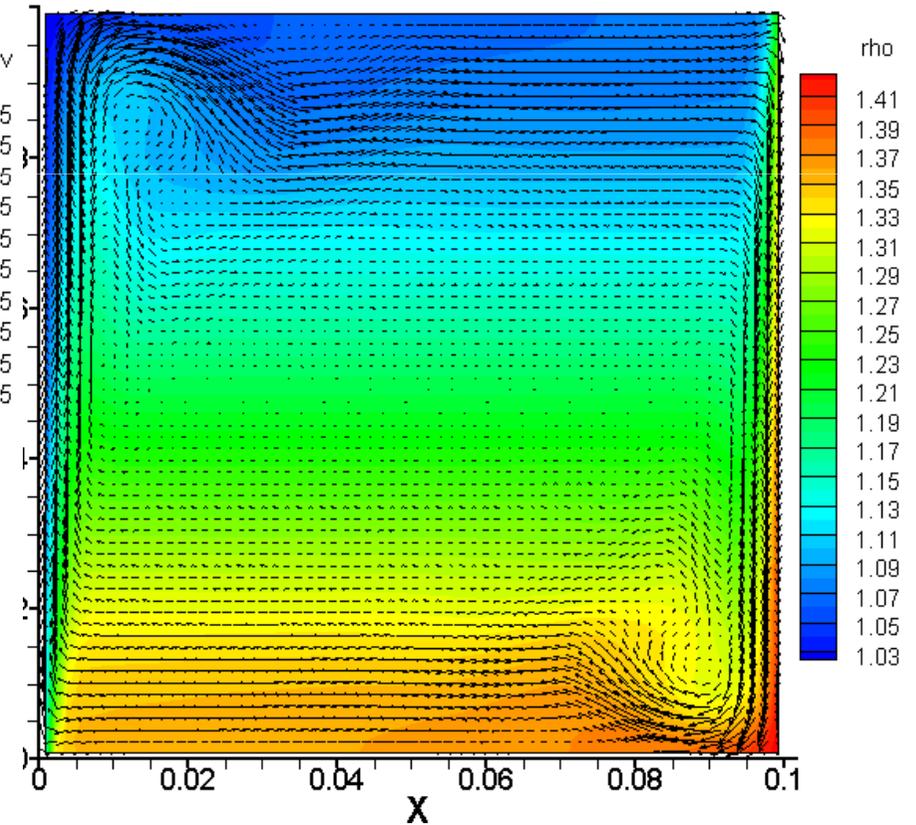


État stationnaire

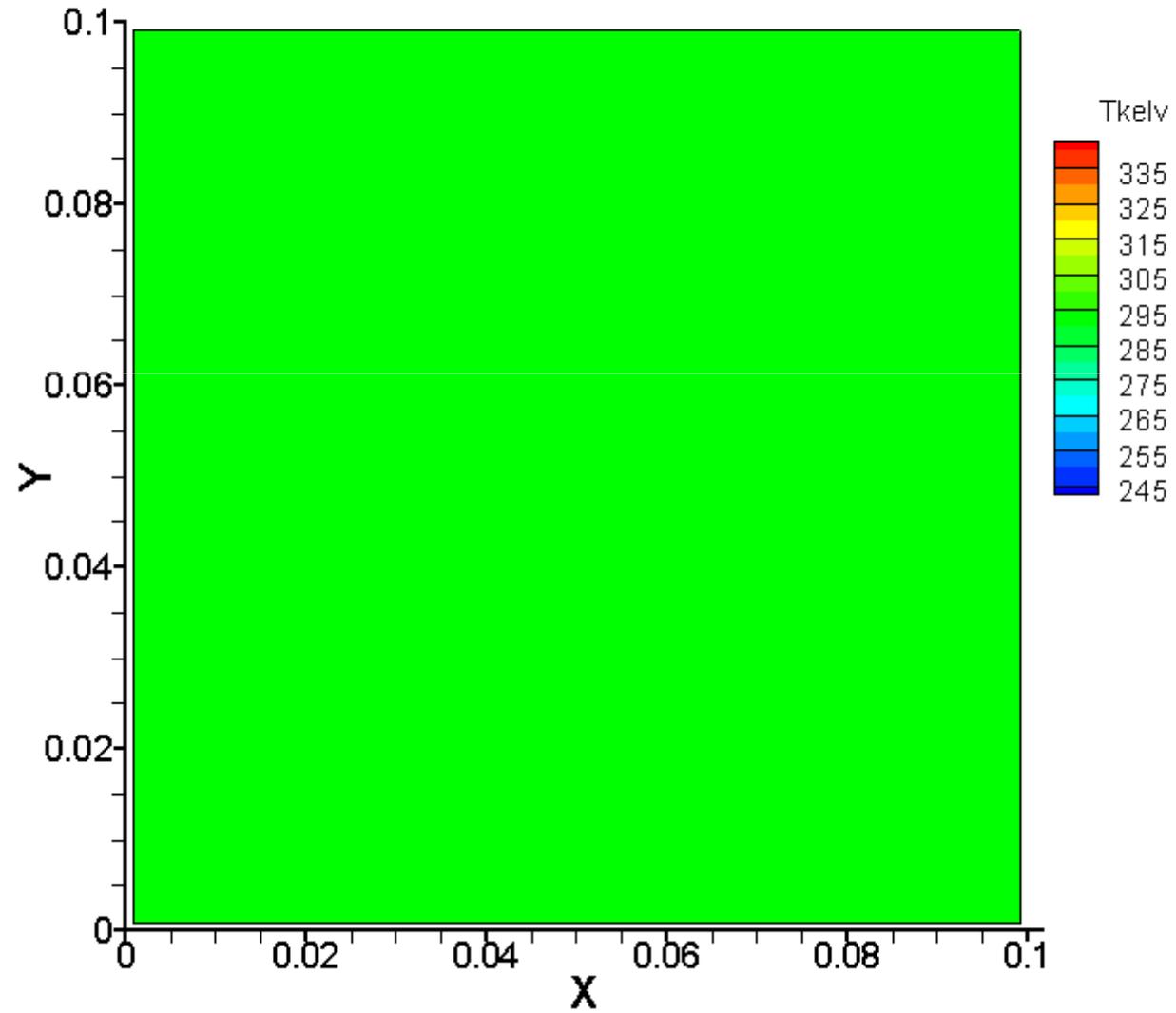
Température



Masse volumique



# Établissement du champ de température



## II.3. Un aperçu sur les méthodes « all-speed »

- Recherche d'une **méthode numérique unifiée** capable de traiter **tous les régimes**
- capable de traiter des écoulements fortement compressibles avec chocs, et de dégénérer vers un solveur purement incompressible (ou faible Mach), ie non contraint par l'acoustique, quand  $M \rightarrow 0$ .
- approches suivies : adapter une méthode compressible au cas incompressible, ou l'inverse.
- dans tous les cas, idée de base : **impliciter le calcul de la pression** dans la partie acoustique des équation ( $\Rightarrow$  éq. de Poisson à  $M \rightarrow 0$ ).
- permet de s'affranchir de la cn de stabilité liée à l'acoustique.

**Exemple d'une méthode de ce type** : équations d'Euler compressibles

Principe : on implémente la partie acoustique des équations si  $M$  est petit.

L'écoulement étant isentropique dans ce cas, il est inutile de considérer l'éq. d'énergie. Système considéré :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \end{cases}$$

Avec la relation d'isentropie  $\partial p = c^2 \partial \rho$

Discretisation temporelle implicite pour l'acoustique :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}^n \cdot \nabla \rho^n + \rho^n \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} & = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}^n \cdot \nabla (\rho^n \mathbf{v}^n) + \rho^n \mathbf{v}^n \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} & = 0 \end{cases}$$

Sous forme incrémentale :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{v}^n) + \rho^n \nabla \cdot (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) & = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{v}^n \otimes \mathbf{v}^n) + \nabla p^n + \rho^n \mathbf{v}^n \nabla \cdot (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) + \nabla (p^{n+1} - p^n) & = 0 \end{cases}$$

## Splitting du système :

- **Étape explicite** : résolution du système compressible complet  $\Rightarrow$  première valeur  $p^{expl}$ ,  $\mathbf{v}^{expl}$  et  $e^{expl}$
- **Étape implicite** : utilisation de la relation d'isentropie et simplification de l'éq. QDM+discr. dérivée temporelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p^{n+1} - p^{expl}}{\delta t} + \rho^n (c^2)^n \nabla \cdot (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) = 0 \\ \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{expl}}{\delta t} + \frac{1}{\rho^n} \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0 \end{array} \right. \quad (1) \quad (2)$$

Application de l'opérateur divergence à (2) et utilisation de (1)  $\Rightarrow$  éq. elliptique pour la pression

$$-\frac{1}{\rho^n (c^2)^n} \frac{\delta p}{\delta t^2} + \nabla \cdot \frac{1}{\rho^n} \nabla \delta p = -\frac{\nabla \cdot (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{expl})}{\delta t} + \frac{1}{\rho^n (c^2)^n} \frac{p^n - p^{expl}}{\delta t^2}$$

$$\delta p = p^{n+1} - p^n$$

Se ramène à l'éq. de Poisson habituelle en incompressible si  $c \rightarrow \infty$

Après résolution, mise à jour de la vitesse par (2), masse volumique et énergie par relation d'isentropie et loi d'état.

Méthode :

- Capable de prendre en compte des écouls fortement compressibles (on n'active pas l'étape implicite), ou faible Mach, jusqu'à l'incompressible.
- condition de stabilité liée uniquement à la convection
- méthode conservative dans l'étape explicite
- apporte une réponse à l'unification des méthodes

Précision :

- l'analyse de la littérature semble montrer que la précision temporelle nécessite l'utilisation d'un pas de temps  $\sim$  acoustique
- cas test diphasique présenté plus loin

Les modèles sans acoustique gardent leur attrait.

## III. Ecoulements diphasiques.

Mise en exergue de quelques problèmes spécifiques aux **écoulements diphasiques à phase séparées**.

- Écoulements sans changement de phase : l'interface est advectée passivement par l'écoulement (disc. contact)
- Écoulements avec changement de phase : flux de masse à travers l'interface, assimilable à une onde de choc

**Méthodes de suivi d'interface** : shock capturing, front tracking, VOF, level set...

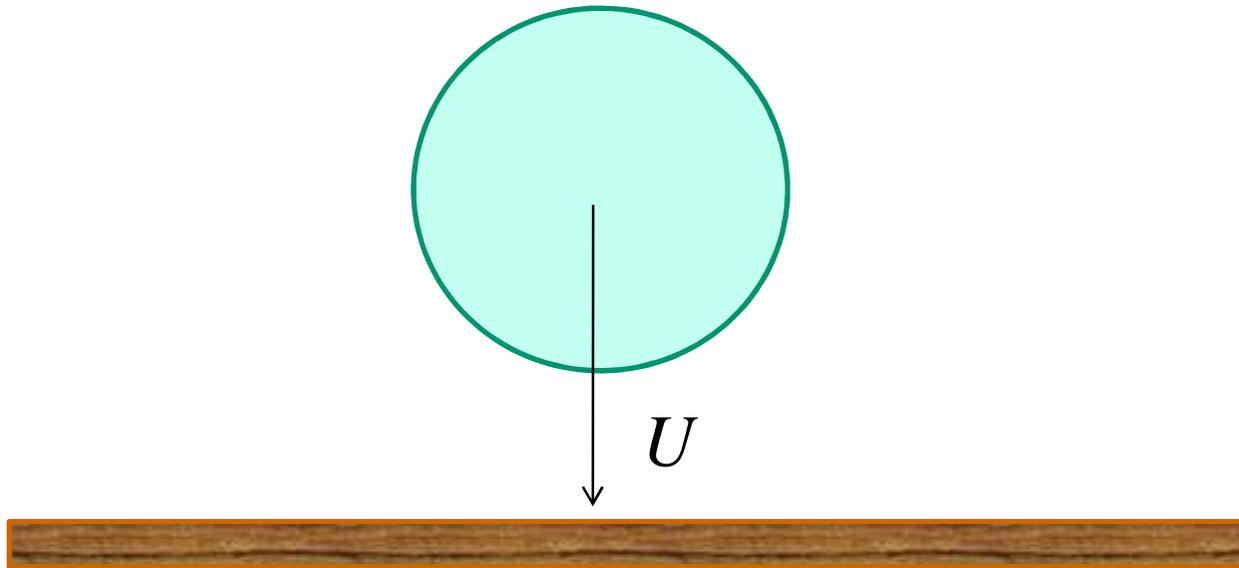
## III.1. Impact de gouttes

Problème axisymétrique, liquide/air, incompressible

Liquide : mélange eau-glycérine

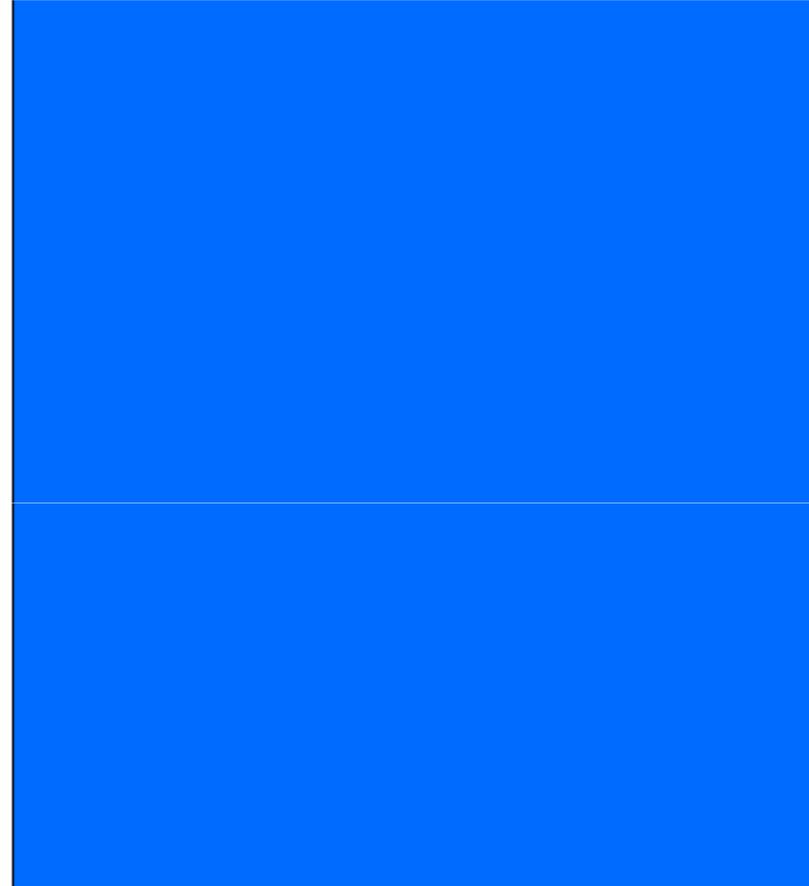
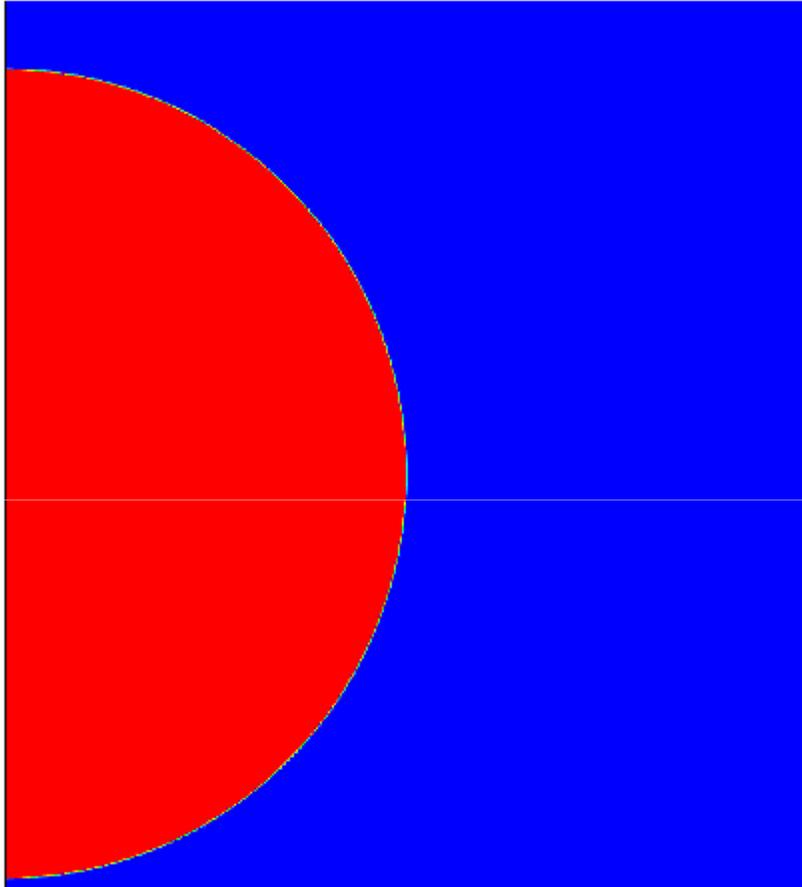
Taille de la goutte et viscosité du liquide variables ( $Re$ )

Étude du jet pariétal aux premiers instants de l'impact



Masse volumique

Vitesse radiale



Maillage 600x720

## Traitement numérique : approche compressible optimisée

Séparation convection acoustique :

- Sous-système convection+diffusion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla (\rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) \end{array} \right.$$

- Sous-système acoustique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \end{array} \right.$$

Suivi d'interface : naturel par résolution de :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0$$

par une méthode « shock capturing ».

Sous-système acoustique : choix de  $c$ , simple paramètre ici

Air :  $c \approx 340$  m/s, eau  $c \approx 1500$  m/s

Choix d'une vitesse unique, constante  $c_0$

Seule contrainte : assurer que le Mach reste petit partout

Sous-système acoustique :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c_0^2 \nabla \cdot v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \end{cases}$$

Matrice jacobienne/x :

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho c_0^2 \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :  $-c_0, c_0$  constantes

Sous-système très rapide à résoudre numériquement,  
décentrement immédiat

**Stratégie de splitting** : pour chaque itération en temps,

-Résolution du sous-système convectif.

Pas de temps convectif  $\delta t_{conv} = CFL \delta x / \max_j |v_j|$

-Soit  $M = \frac{\max_j |v_j|}{c_0}$

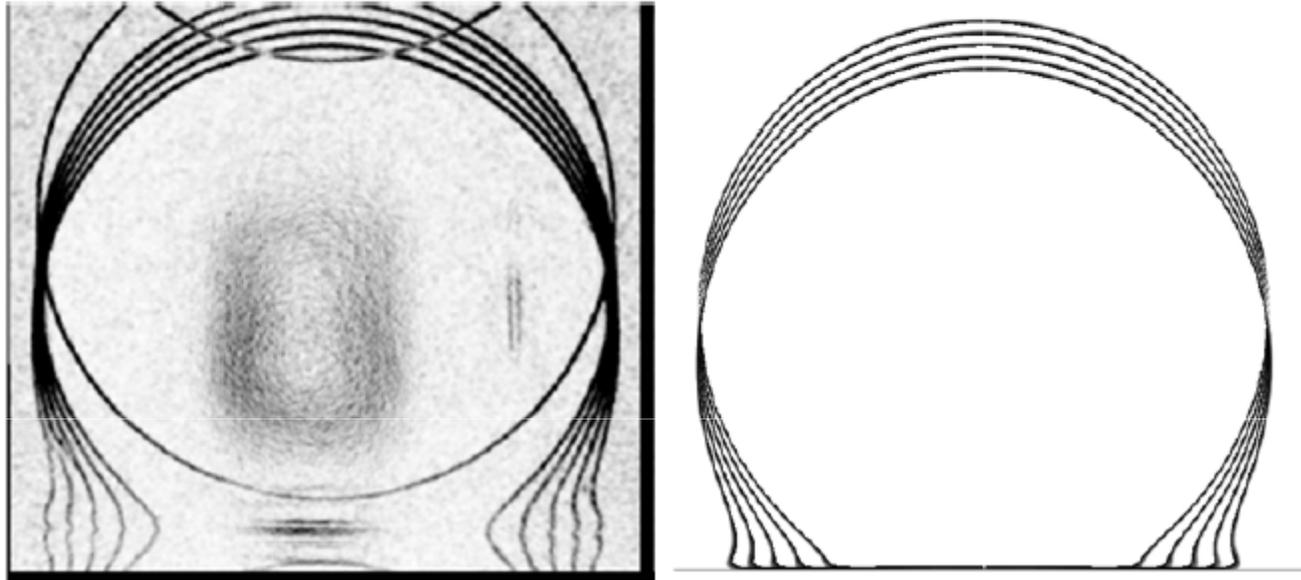
On effectue  $1/M$  résolutions du sous-système acoustique.

Pas de temps acoustique  $\delta t_{ac} = CFL \delta x / c_0$

**Méthode proche de la méthode de compressibilité artificielle de Chorin (1967)**. Ici on conserve de faibles effets de compressibilité.

Méthode robuste et efficace.

## Comparaison calcul-expé :



Intervalle entre les images :  $50 \mu\text{s}$

$$\rho_{liq} / \rho_{air} = 1000$$

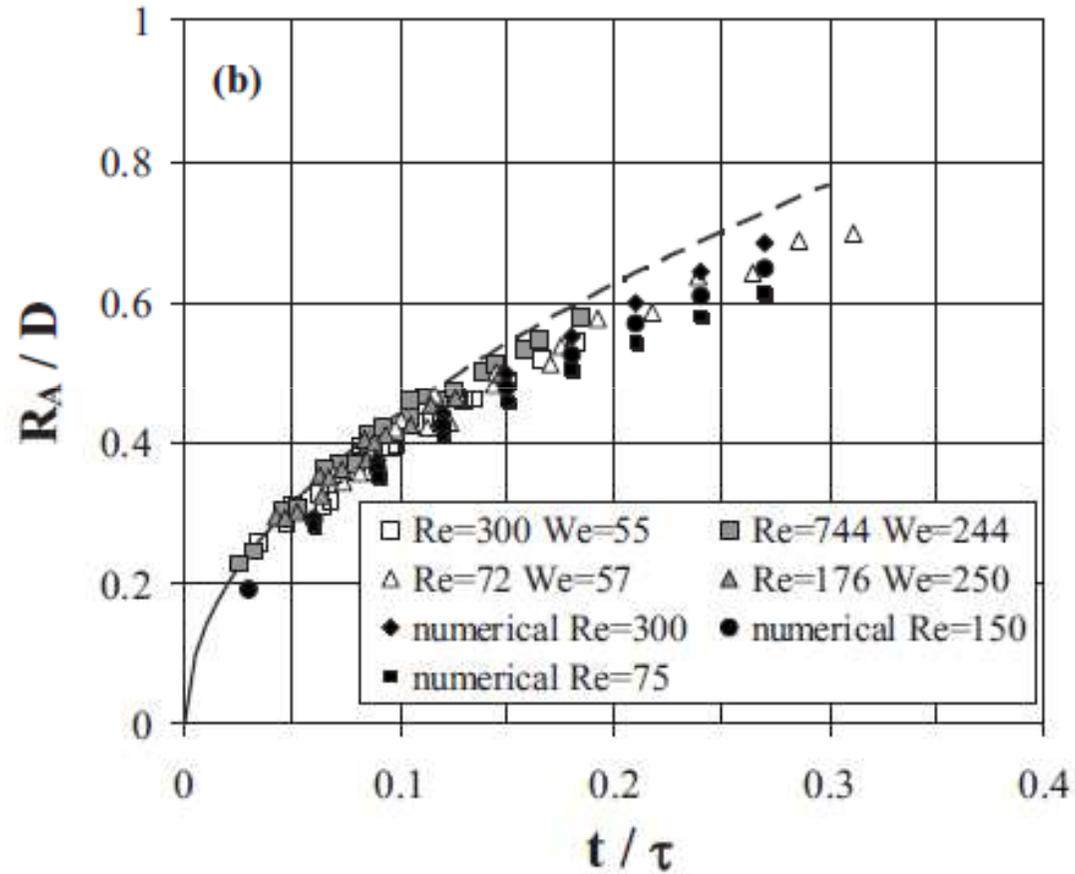
$$D = 4,25\text{mm}$$

$$\nu = 92,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$U = 1,78\text{m/s}$$

$$Re = \frac{UD}{\nu} = 82$$

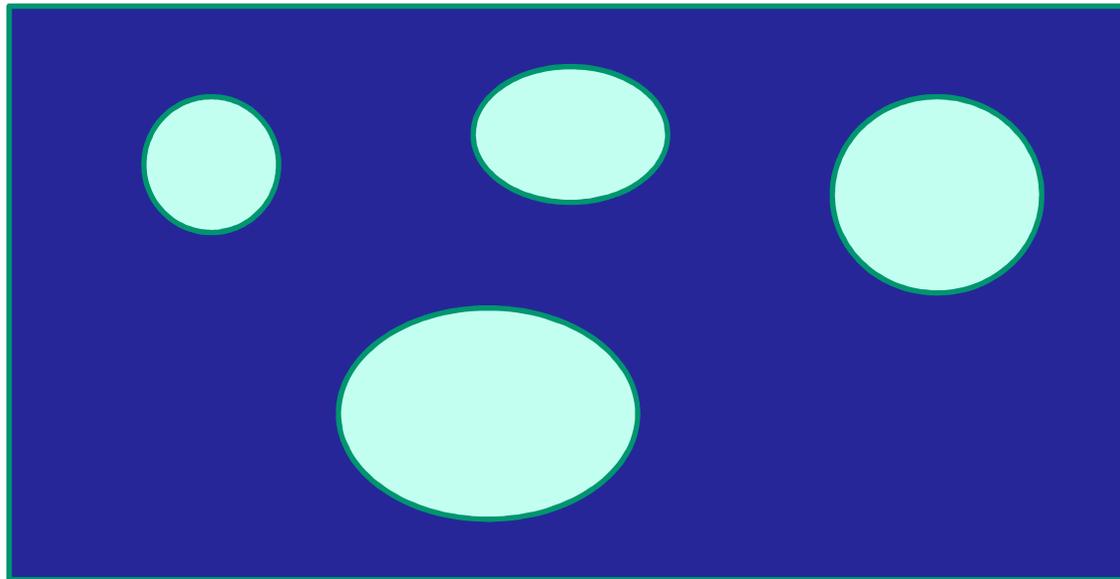
# Evolution de la longueur du jet pariétal, comparaison calcul-expé



## III.2. Ecoulement liquide-gaz en enceinte fermée

Cas considéré : écoulement de liquide incompressible enfermant des zones gazeuses.

Aussi : cocotte-minute.



eau

**Problématique : raccorder un écoulement incompressible et un écoulement faible Mach.** Problème de la pression : existence de 2 pressions en faible Mach.

Cas des bulles : chaque bulle a sa propre pression thermodynamique  $P_j(t)$ .

Introduction des fonctions caractéristiques des bulles  $H_j$ :

$$H_j(x, t) = 1 \quad \text{dans la bulle } j$$

$$H_j(x, t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

$$H = \sum_j H_j(x, t)$$

Définition de la masse volumique du fluide composite  
(loi d'état GP pour l'air) :

$$\rho(\mathbf{x},t) = \sum_{j=1}^N H_j(\mathbf{x},t) \frac{P_j(t)}{rT(\mathbf{x},t)} + (1 - H(\mathbf{x},t))\rho_l$$

Eq. de continuité et pour la température :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = H(\mathbf{x},t) \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} - \sum_{j=1}^N H_j(\mathbf{x},t) \frac{1}{P_j} \frac{dP_j}{dt}$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} T \sum_{j=1}^N H_j(\mathbf{x},t) \frac{1}{P_j} \frac{dP_j}{dt}$$

## Équation QDM : problème de la pression

Les ddp thermodynamiques engendrent une force sur le liquide  $\Rightarrow$  un terme de pression thermodyn. doit être conservé dans l'éq. dans le liquide

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla(p + P_e) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

La pression  $P_e$  doit :

- Conserver la vitesse à divergence nulle dans le liquide
- Être égale aux pressions  $P_j$  dans les bulles

$$\text{Soit : } \begin{cases} \nabla^2 P_e(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{dans le liquide} \\ P_e(\mathbf{x}, t) = P_j(t), & \text{dans chaque bulle} \end{cases}$$

En utilisant la fonction caractéristique,  
 éq. de Helmholtz pour  $P_e$  :

$$\frac{1}{\eta^2} P_e(\mathbf{x}, t) \cdot H(\mathbf{x}, t) + (1 - H(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla^2 P_e(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N H_j(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{1}{\eta^2} P_j(t)$$

$\eta$  homogène à une longueur, pour homogénéité dimensionnelle; de l'ordre de l'épaisseur (numérique) de l'interface.

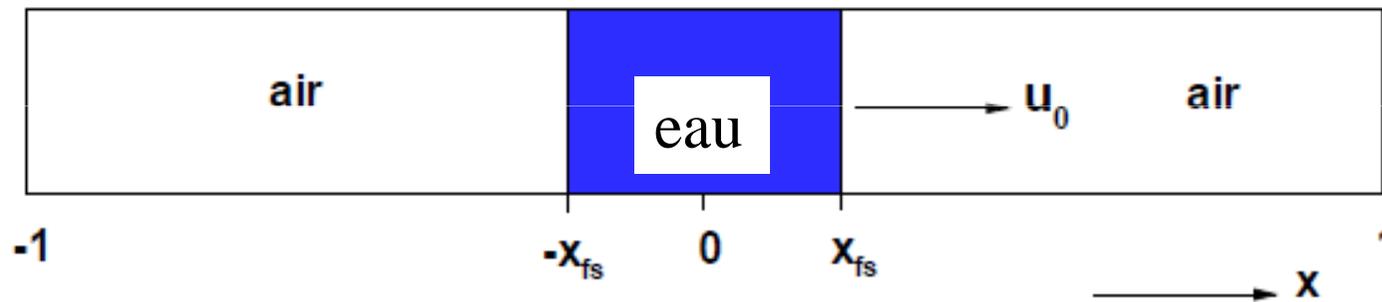
Calcul des pressions  $P_j(t)$  :

$$\frac{1}{P_j} \frac{dP_j}{dt} = \frac{1}{\int_{\Omega_j(t)} d\mathbf{x}} \left( \int_{\Omega_j(t)} \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} d\mathbf{x} - \int_{\Omega_j(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \right)$$

## Cas test 1D de comparaison des modèles :

- faible Mach/incompressible
- « all speed » compressible/incompressible

### OWC : Oscillating Water Column



État initial : mise en mouvement uniforme du fluide.  
La colonne d'eau prend un mouvement oscillatoire par la diff. de pression ainsi créée.

Traitement numérique de l'interface par front-tracking.

Fluides non visqueux.

Choix du pas de temps : critère explicite

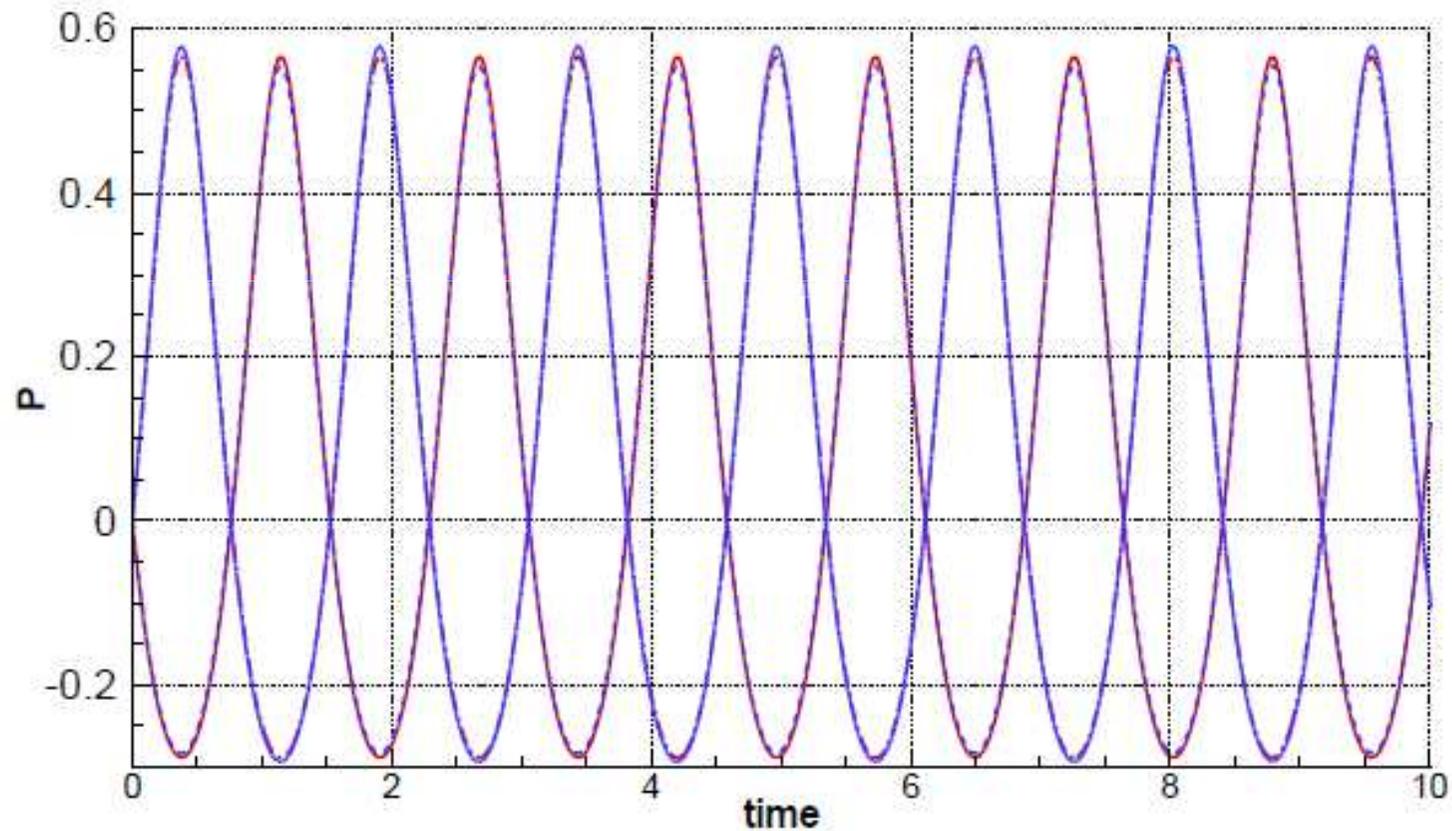
$$\delta t = CFL \frac{\delta x}{\max_j (|u_j| + c_l)}$$

CFL=1 : critère acoustique

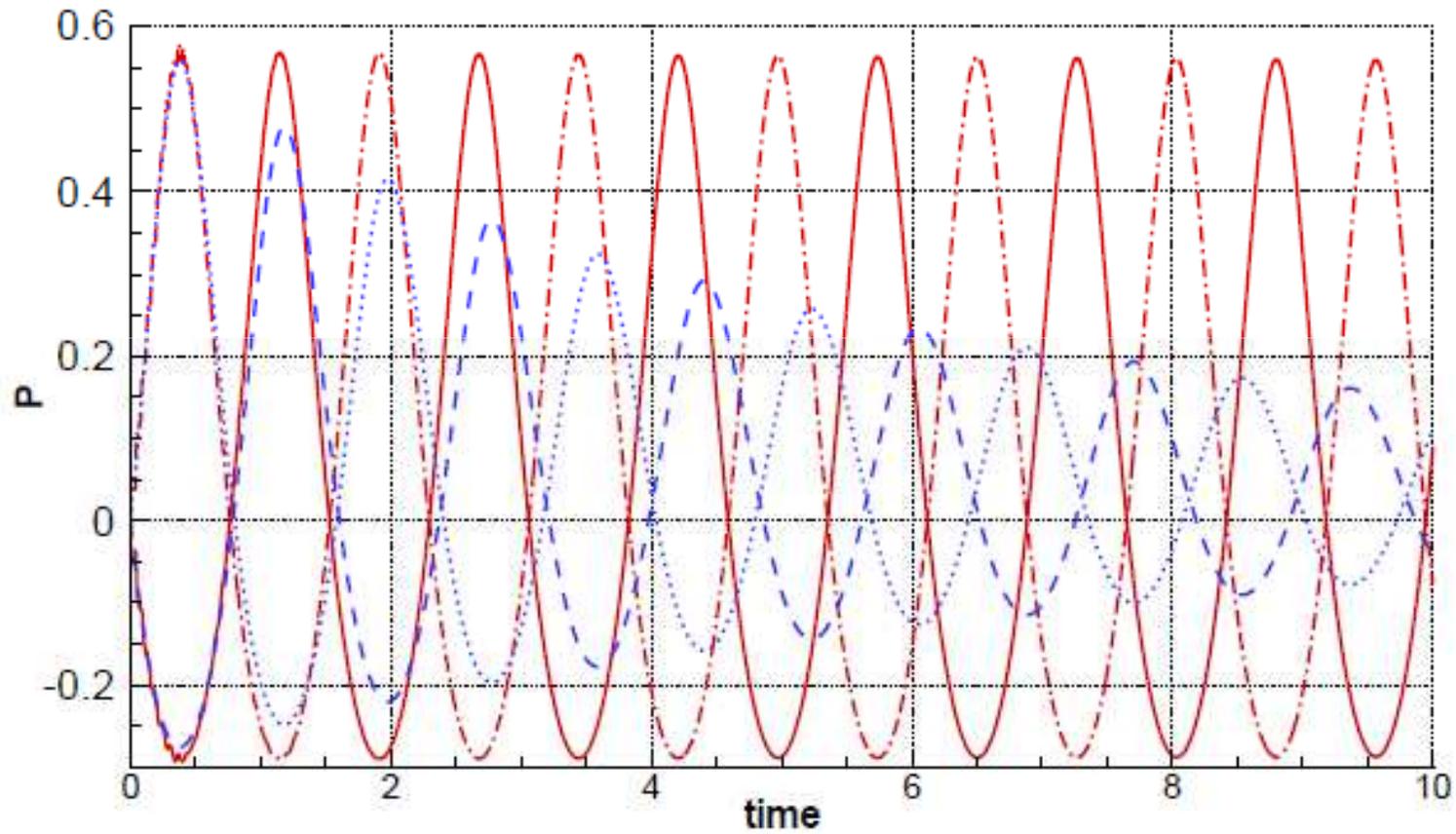
CFL=100 : correspond à un pas de temps donné par le critère convectif

Résultats : évolution temporelle des pressions relatives près des parois (pression thermodynamique pour la méthode faible Mach). Rouge : CFL=1, : Bleu : CFL=100

### Méthode faible Mach

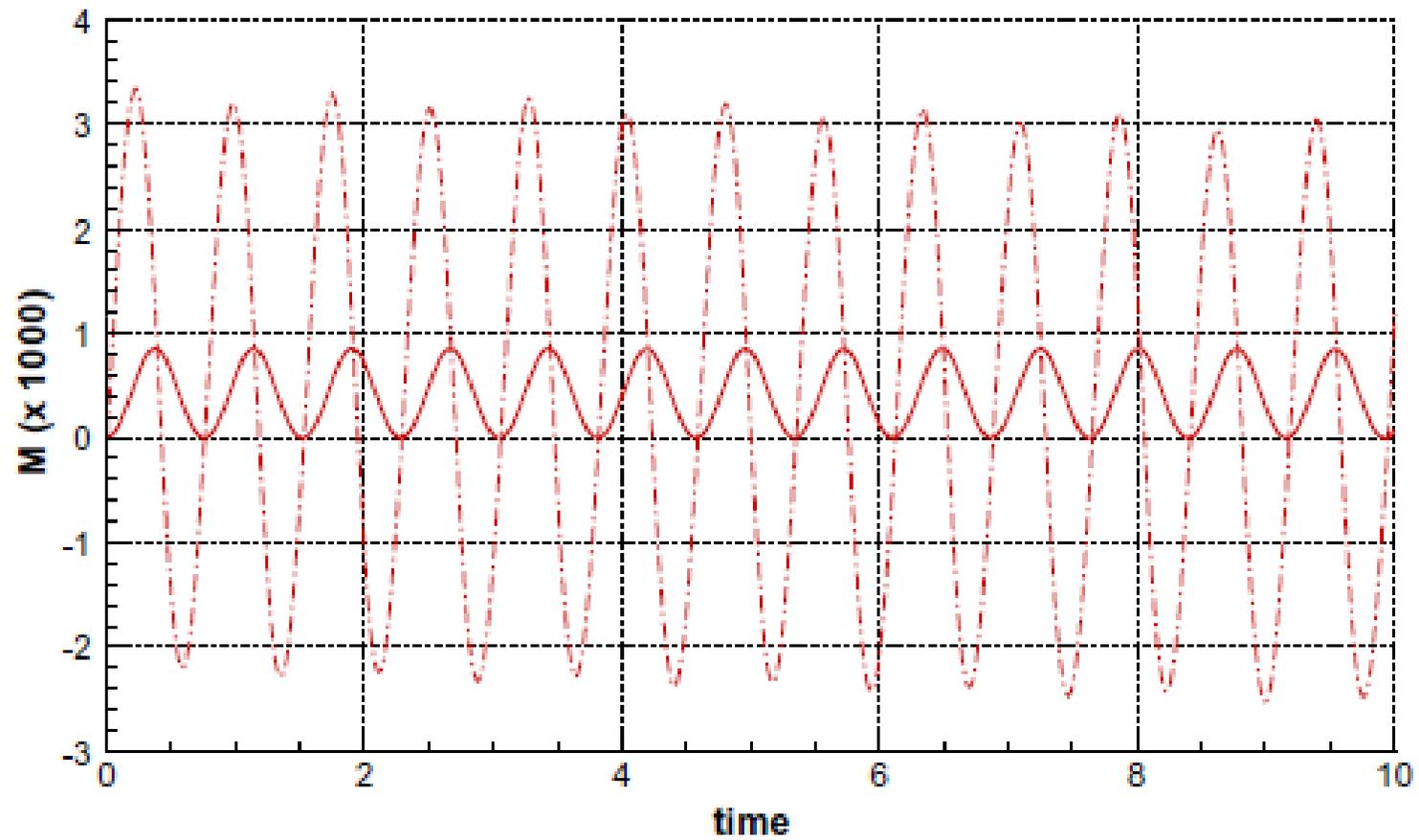


Méthode « all speed » . : Rouge : CFL=1, Bleu : CFL=100



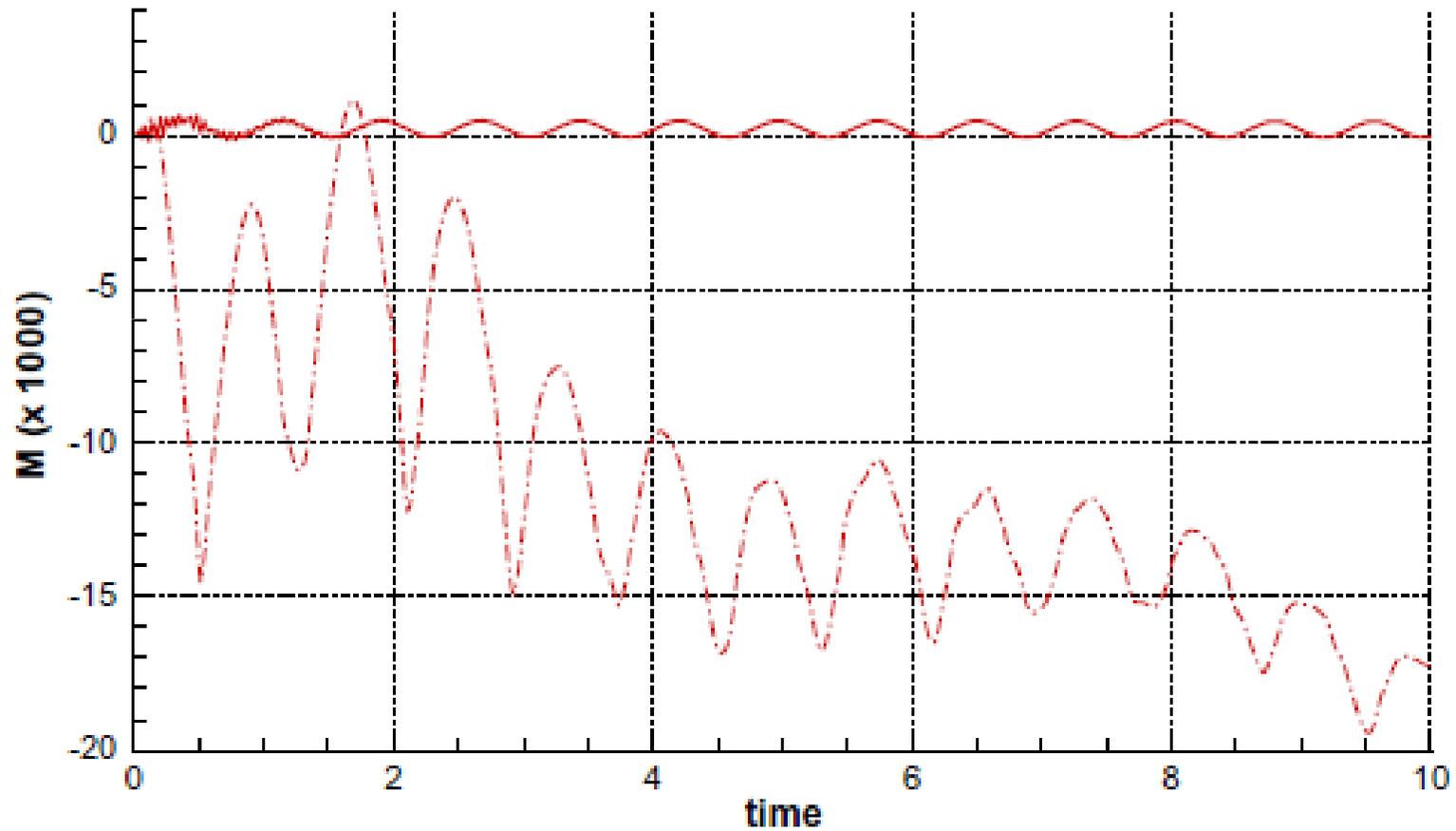
Masse d'air totale.

**Méthode faible Mach.** Ligne continue : CFL=1, Tirets : CFL=100



Masse d'air totale.

Méthode « all speed ». Ligne continue : CFL=1, Tirets : CFL=100



## Un exemple 2D : deux bulles à pressions thermo. différentes dans une cavité remplie de liquide

2 bulles d'air dans de l'eau ( $\rho=1000$ )

Boîte fermée  $50\mu\text{m}\times 100\mu\text{m}$

$P_1=1.4 \text{ atm}$

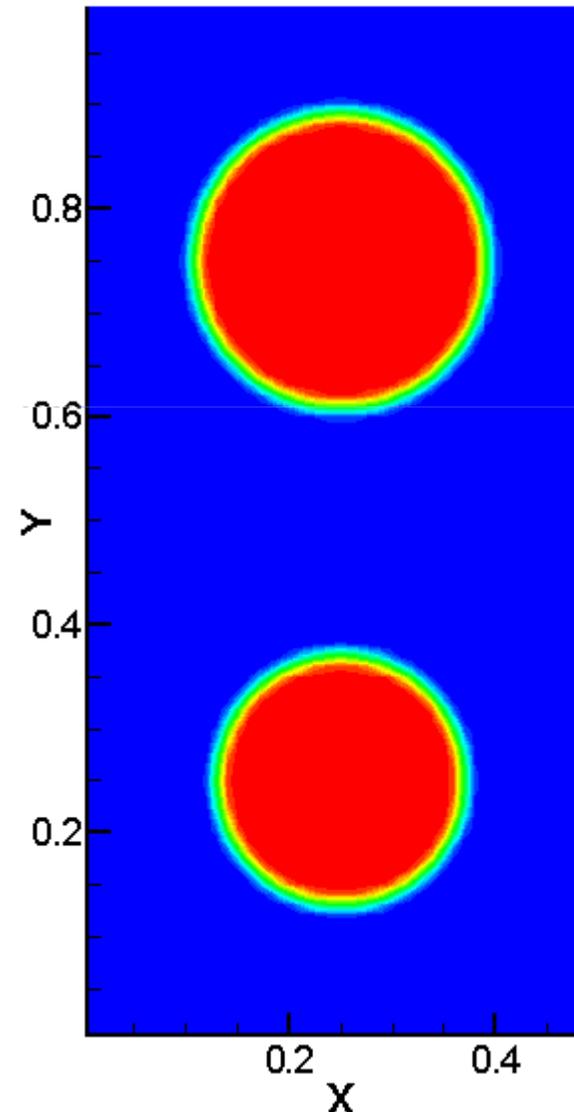
$P_2=1 \text{ atm}$

$T=293\text{K}$

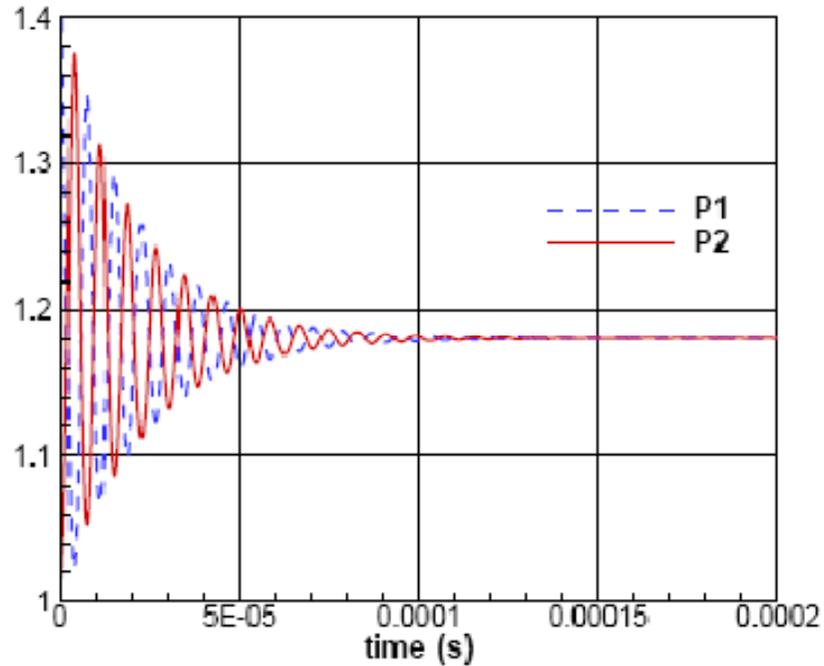
Grille  $48\times 96$

Tension de surface (réaliste)

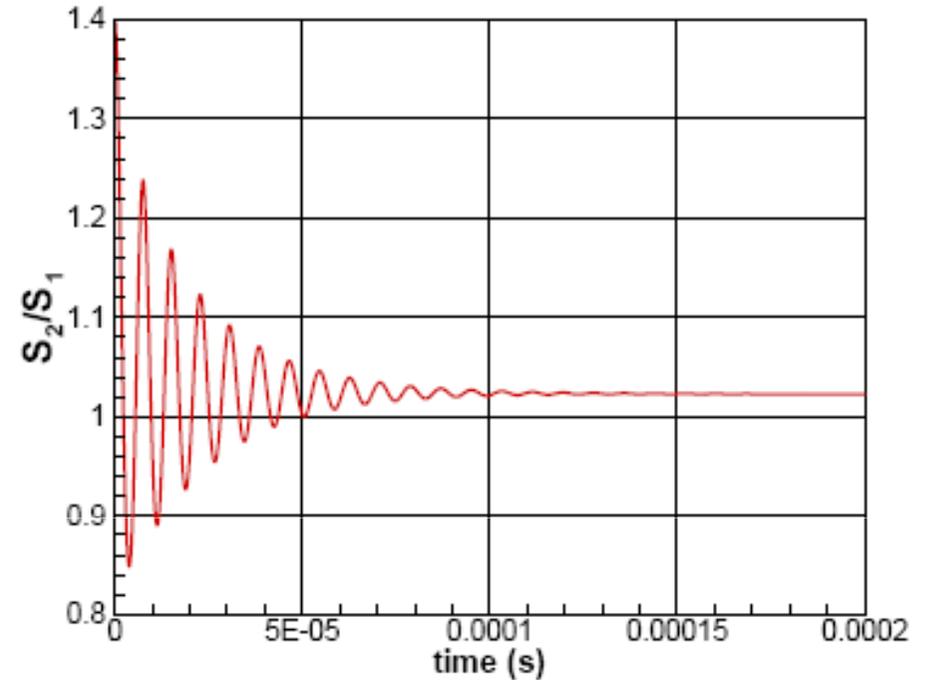
Pas de gravité



## Évolution temporelle des pressions thermodynamiques



## Évolution temporelle des surfaces des bulles

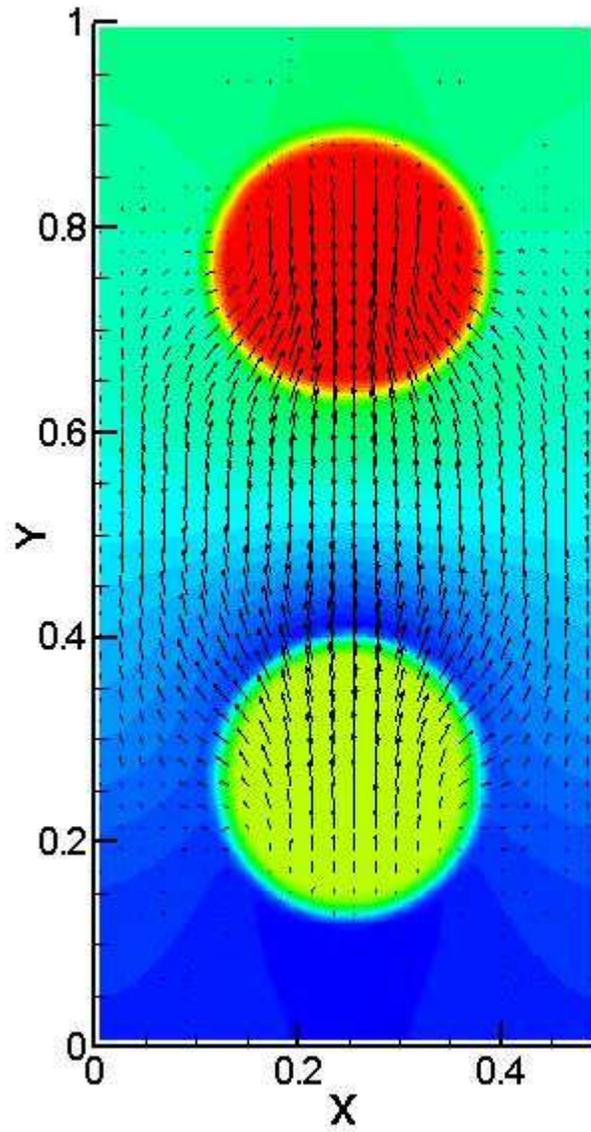


Conservation de la masse : variation de surface totale des bulles  $< 0.05\%$

Erreur sur la valeur stationnaire de pression thermo  $\sim 0.15\%$

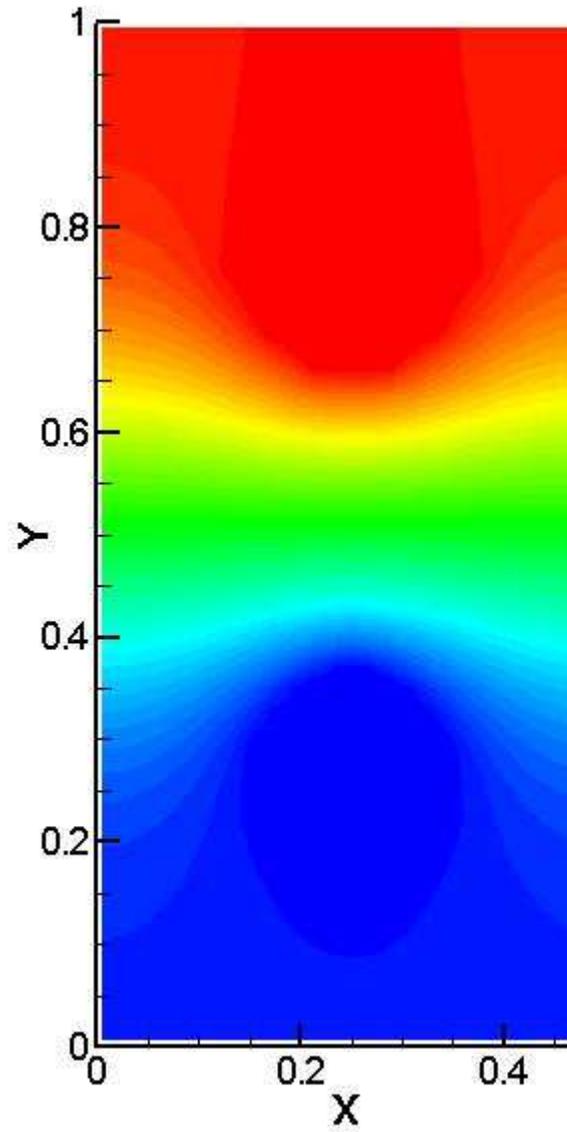
Erreur sur le rapport des surfaces à l'état stationnaire  $\sim 2.25\%$

*Vitesse+p*



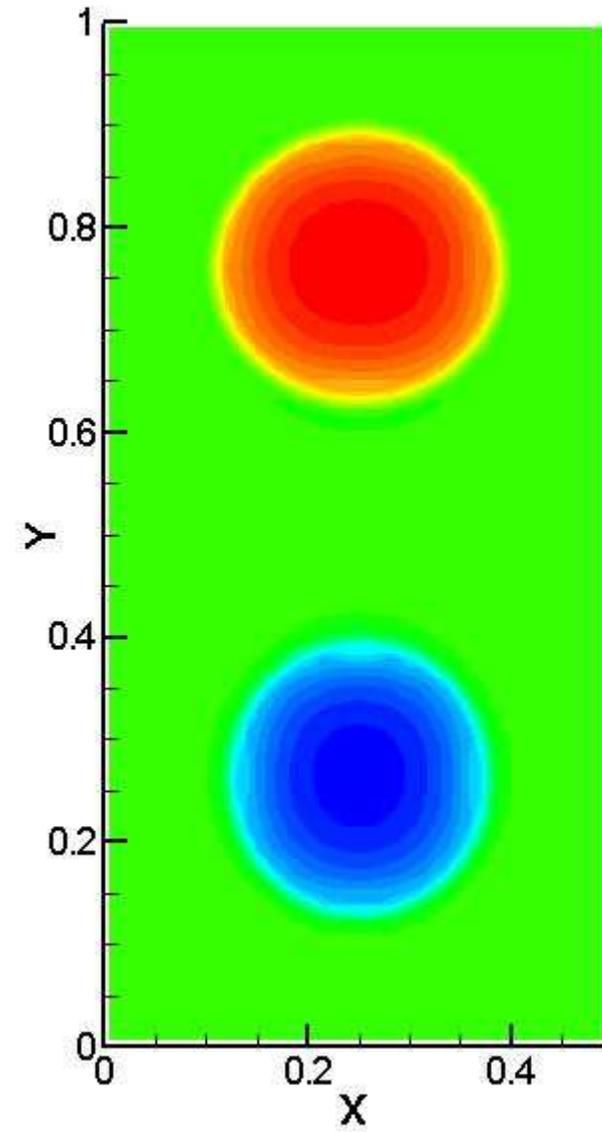
temps  $t=1\mu s$

*Pe*



Ecole de Printemps MFN 2015

*T*



149