

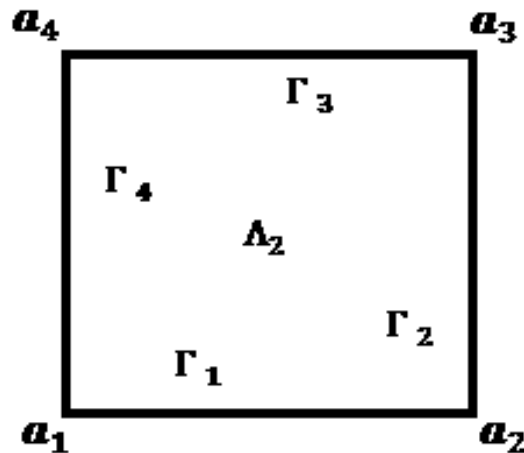
MÉTHODES SPECTRALES
POUR
LES ÉCOULEMENTS INCOMPRESSIBLES

MEJDI AZAÏEZ

Porquerolles du 31 Mai au 6 Juin 2015

DOMAINES

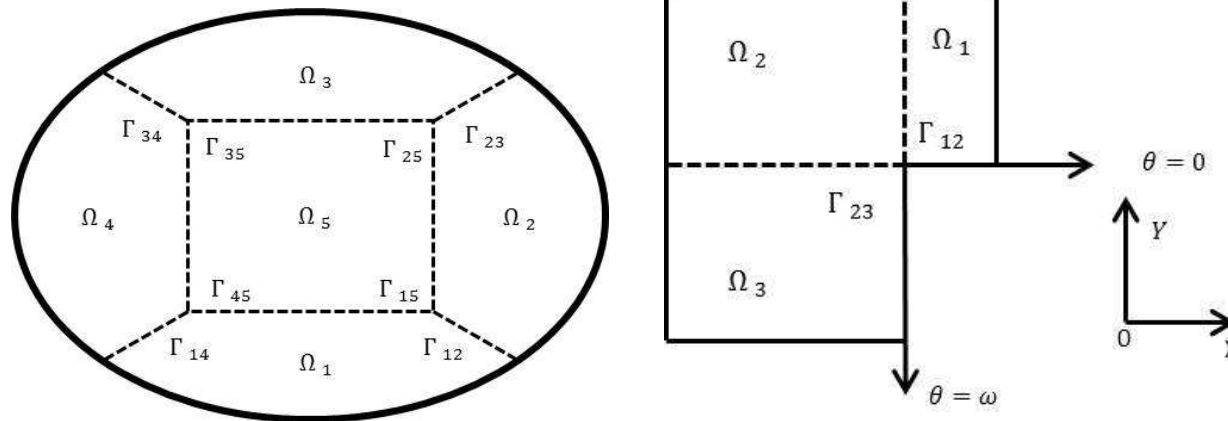
- En dimension 1, le domaine fondamental est l'intervalle $\Lambda =] - 1, 1[$.
- En dimension 2, l'élément fondamental est le carré Λ^2 .



DOMAINES

Les domaines bi-dimensionnels les plus généraux que l'on peut traiter par “éléments spectraux” sont les ouverts Ω à frontière régulière décomposable :

$$\bigcup_{k=1}^K \Omega_k \subset \Omega \subset \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k.$$



Exemple d'une partition d'un ouvert régulier en 2D.

OUTILS MATHÉMATIQUES : ESPACES DE SOBOLEV

- $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables u telles que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad (1)$$

- Pour tout entier positif m , $H^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions u dans $L^2(\Omega)$ telles que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2(\Omega)$, il est muni de la semi-norme

$$|u|_{H^m(\Omega)} = \|d_x^m u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2)$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{\ell=0}^m \|d_x^\ell u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

OUTILS MATHÉMATIQUES : ESPACES DE SOBOLEV

- $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables u telles que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2(x, y) dx dy \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad (4)$$

- Pour tout entier positif m , $H^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions u dans $L^2(\Omega)$ telles que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2(\Omega)$, il est muni de la semi-norme

$$|u|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha, |\alpha|=m} \|\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha, |\alpha|\leq m} \|\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

- $H_0^m(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions $u \in H^m(\Omega)$ nulles sur le bord.

PROBLÈME CONTINU

- Le “problème exact” que nous considérons est le “prototype” des problèmes aux limites elliptiques, à savoir le problème de Dirichlet pour le Laplacien $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

où f est une donnée suffisamment régulière. L'inconnue u est cherchée dans $H_0^1(\Omega)$.

- La formulation variationnelle du problème (14) est : *trouver* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solution de*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) \, dx \, dy = (f, v) \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{8}$$

- ✓ Dans cette formulation le gradient (∂_x, ∂_y) est noté ∇

APPROXIMATION DE GALERKIN

On se donne un sous-espace de dimension finie X_N de $H_0^1(\Omega)$, où N est un paramètre entier dont on va préciser la signification ultérieurement, le problème discret :

$$\forall v_N \in X_N, \quad \int_{\Omega} \nabla u_N(x, y) \cdot \nabla v_N(x, y) \, dx \, dy = (f, v_N) \quad u_N \in X_N, \quad (9)$$

★ Le principe de la méthode des éléments spectraux consiste à prendre comme espaces X_N des espaces de fonctions v_N qui sont des **polynômes de degré $\leq N$ par morceaux**.

DISCRÉTISATION

Le problème de Galerkin (18) est de dimension finie, à condition de savoir évaluer exactement les intégrales

$$\int_{\Omega} \nabla u_N(x, y) \cdot \nabla v_N(x, y) \, dx \, dy \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} f(x, y) v_N(x, y) \, dx \, dy,$$

Ceci est rarement le cas et on est amené à remplacer les intégrales par des approximations numériques : c'est ce qu'on appelle *l'intégration numérique* .

Ainsi la forme bilinéaire exacte $a(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$ sera remplacée sur $X_N \times X_N$ par une forme bilinéaire approchée a_N et le produit scalaire (f, v) sera remplacé par un produit scalaire approché $(f, v)_N$

On obtient ainsi un nouveau problème discret :

$$\forall v_N \in X_N, \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N \quad u_N \in X_N. \quad (10)$$

POLYNÔMES DE LEGENDRE

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit L un polynôme non nul de degré n qui soit orthogonal à $\mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$ pour le produit $L^2(\Lambda)$. Alors

- L a la parité de son degré : $L(-x) = (-1)^n L(x)$;
- Les zéros de L sont tous simples et tous intérieurs à Λ .

Ainsi la définition suivante a bien un sens.

Définition : On note L_n l'unique polynôme de degré n qui soit orthogonal à $\mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$ et satisfasse $L_n(1) = 1$.

Les L_n forment une base orthogonale de $L^2(\Lambda)$ et les L_n^* définis par :

$$L_n^* = \frac{L_n}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}}$$

forment une base orthonormale de $L^2(\Lambda)$.

POLYNÔMES DE LEGENDRE

- Pour $n \geq 1$, on note ζ_1, \dots, ζ_n les zéros de L_n avec la convention

$$-1 < \zeta_1 < \dots < \zeta_n < 1.$$

On les appelle les points de collocation de **Gauss**.

- Soit $n \geq 1$. Les $n - 1$ zéros de L'_n sont tous distincts et tous intérieurs à Λ . On les note ξ_1, \dots, ξ_{n-1} ; on note encore $\xi_0 = -1$ et $\xi_n = 1$. On a ainsi

$$-1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = 1.$$

Les $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ sont donc les zéros du polynôme $(1 - x^2)L'_n(x)$ et sont appelés les points de collocation de **Gauss-Lobatto**.

♣ *Les zéros des L_n et aussi ceux des L'_n sont très importants, car ils sont au fondement de toute la méthode spectrale de collocation.*

POLYNÔMES D'INTERPOLATION

L'opérateur d'interpolation de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto : pour un u dans $\mathcal{C}^0(\bar{\Lambda})$, est l'unique polynôme $i_N u$ de $\mathcal{P}_N(\Lambda)$ qui coïncide avec u aux $N + 1$ points $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N$.

On montre pour la différence $u - i_N u$ vérifie

Théorème: Si pour un $s \geq 1$, u est dans $H^s(\Lambda)$, alors :

$$\begin{aligned} \|u - i_N u\|_{H^1(\Lambda)} &\leq c N^{1-s} \|u\|_{H^s(\Lambda)} \\ \|u - i_N u\|_{L^2(\Lambda)} &\leq c N^{-s} \|u\|_{H^s(\Lambda)}. \end{aligned} \tag{11}$$

POLYNÔMES ET APPROXIMATION POLYNOMIALE SUR LE CARRÉ

- L'idée fondamentale est la “tensorisation” :

$$L_n^* \otimes L_m^*(x, y) := L_n^*(x) L_m^*(y) \quad n, m \in \mathbb{N}$$

constitue une base orthonormale de $L^2(\Lambda^2)$. Pour $u \in L^2(\Lambda^2)$, notons \hat{u}_{nm} les coefficients de u dans la base $L_n^* \otimes L_m^*$, on a :

$$\hat{u}_{nm} = (u, L_n^* \otimes L_m^*) \quad \text{et} \quad u = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \hat{u}_{nm} L_n^* \otimes L_m^*.$$

- L'opérateur d'interpolation de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto sur le carré : pour un u dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Lambda^2})$, $\mathcal{I}_N u$ est l'unique polynôme de $\mathcal{P}_N(\Lambda^2)$ qui coïncide avec u aux $(N+1)^2$ points (ξ_i, ξ_j) pour tout couple (i, j) dans $\{0, 1, \dots, N\}^2$.

Théorème Si pour un $s > 1$, u est dans $H^s(\Lambda^2)$, alors :

$$\|u - \mathcal{I}_N u\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c N^{-s} \|u\|_{H^s(\Lambda^2)}.$$

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

On se place d'abord sur l'intervalle Λ . Soit $N \in \mathbb{N}$.

- Il existe des poids $\omega_j > 0$ pour $j = 1, \dots, N$ tels que l'on ait la formule suivante, dite de **Gauss Legendre** :

$$\forall \varphi \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda) \quad \int_{\Lambda} \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^N \varphi(\zeta_j) \omega_j.$$

- Il existe des poids $\rho_j > 0$ pour $j = 0, \dots, N$ tels que l'on ait la formule suivante, dite de **Gauss-Lobatto Legendre** :

$$\forall \varphi \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda) \quad \int_{\Lambda} \varphi(x) dx = \sum_{j=0}^N \varphi(\xi_j) \rho_j.$$

Dans le cadre de cet exposé, on utilisera les points de Gauss-Lobatto (mieux adaptés aux problèmes aux limites et aux conditions de raccord).

APPROXIMATION POLYNOMIALE SUR LE CARRÉ

- Sur le carré Λ^2 , on a des résultats analogues.

- Formule de Gauss-Legendre :

$$\forall \varphi \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda^2) \quad \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \varphi(x, y) \, dx \, dy = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N \varphi(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j.$$

- Formule de Gauss-Lobatto-Legendre :

$$\forall \varphi \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda^2) \quad \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \varphi(x, y) \, dx \, dy = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j.$$

- Par ailleurs nous avons :

$$\forall \varphi_N \in \mathcal{P}_N(\Lambda^2) \quad \|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda^2)}^2 \leq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j \leq 9 \|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda^2)}^2.$$

CALCUL DES POINTS ET DES POIDS DE GAUSS-LEGENDRE

- Rappelons la formule de récurrence vérifiée par les polynômes de Legendre:

$$L_0(\zeta) = 1 \quad \text{et} \quad L_1(\zeta) = \zeta$$

$$(n+1)L_{n+1}(\zeta) = (2n+1)\zeta L_n(\zeta) - nL_{n-1}(\zeta), \quad n > 0.$$

- A partir de cette relation, on peut en réécrire une pour $L_n^* = \frac{L_n}{\sqrt{n+1/2}}$

$$\zeta L_n^*(\zeta) = \beta_n L_{n-1}^*(\zeta) + \beta_{n+1} L_{n+1}^*(\zeta) \quad \text{avec} \quad \beta_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 1}}.$$

- ♣ Cette relation écrite pour tout $n > 0$ est équivalente à

$$\zeta \begin{pmatrix} L_0^* \\ L_1^* \\ \dots \\ L_{N-1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0^* \\ L_1^* \\ \dots \\ L_{N-1}^* \end{pmatrix} + \beta_N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ L_N^* \end{pmatrix}.$$

CALCUL DES POINTS ET DES POIDS DE GAUSS-LEGENDRE

- Les points de Gauss ζ_j sont les solutions de $L_N^* = 0$ et sont donc **les valeurs propres** de la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$\implies M$ est tridiagonale, symétrique et à diagonale nulle.

- Les poids sont calculés grâce à l'expression classique c'est-à-dire

$$\omega_j = \frac{2}{N L_N'(\zeta_j) L_{N-1}(\zeta_j)}.$$

CALCUL DES POINTS ET DES POIDS DE GAUSS-LOBATTO-LEGENDRE

Soit N un entier > 0 fixé. On pose $\xi_0 = -1$ et $\xi_N = 1$, on s'intéresse au calcul des $N - 1$ points ξ_j et $N + 1$ réels positifs ρ_j présents dans la formule de quadrature de Gauss-Lobatto (13).

A partir de la relation de récurrence vérifiée par les $(L_n)_n$ on a

$$(n + 1)L'_{n+1}(\zeta) = (2n + 1)\zeta L'_n(\zeta) + (2n + 1)L_n(\zeta) - nL'_{n-1}(\zeta).$$

En utilisant l'égalité suivante

$$(2n + 1)L_n(\zeta) = L'_{n+1}(\zeta) - L'_{n-1}(\zeta)$$

on obtient

$$nL'_{n+1}(\zeta) = (2n + 1)\zeta L'_n(\zeta) - (n + 1)L'_{n-1}.$$

CALCUL DES POINTS ET DE POIDS DE GAUSS-LOBATTO-LEGENDRE

- Les points de GLL sont les valeurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{N-2} \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{N-2} & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n(n+2)}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}}, \quad 1 \leq n \leq N-2.$$

- Les poids ρ_j sont donnés par

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\zeta_j)}.$$

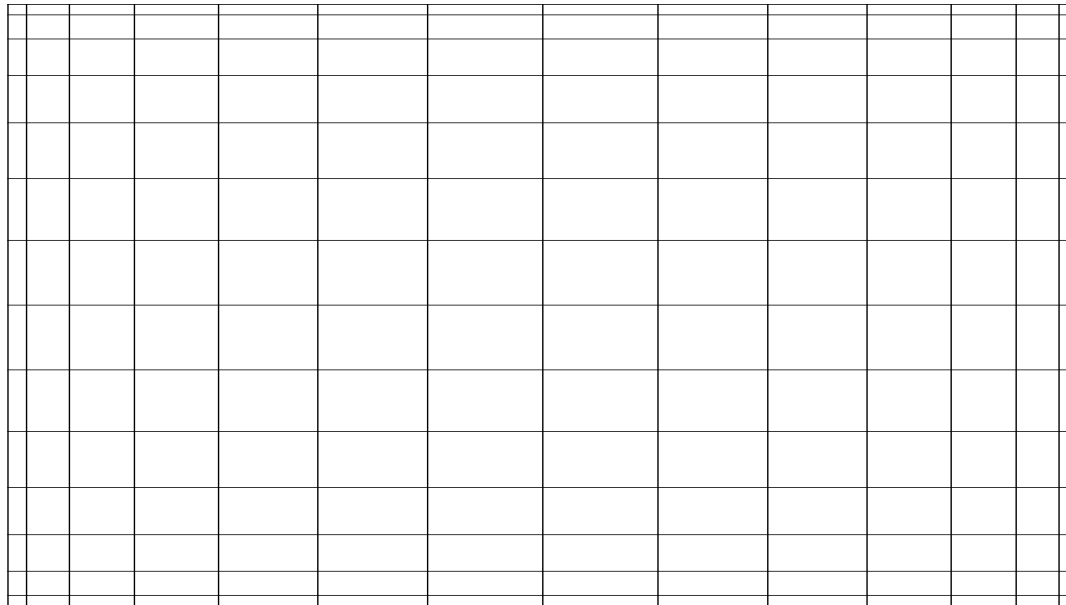
REMARQUES

- Les points de GLL et GL en $\mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$ aux bords et en $\mathcal{O}(\frac{1}{N})$ au centre.
- $\forall j = 1, \dots, N - 1, \zeta_j < \xi_j < \zeta_{j+1}$.
- Exemple de points et des poids de GL pour $N = 6$ et de GLL pour $N = 5$.

ξ_j	ρ_j	ζ_j	ω_j
-1.00000000	0.06666666	-0.93246951	0.1713244
-0.76505532	0.37847495	-0.66120938	0.3607615
-0.28523151	0.55485837	-0.23861918	0.4679139
0.28523151	0.55485837	0.23861918	0.4679139
0.76505532	0.37847495	0.66120938	0.3607615
1.00000000	0.06666666	0.93246951	0.1713244

REMARQUES

La figure suivante décrit un exemple de maillage bidimensionnel construit à partir des points de Gauss-Lobatto-Legendre. Dans ce cas le nombre de points est égal à 15



Grille pour $N = 14$

CAS DES POLYNÔMES DE TCHEBYCHEFF

- Ce sont les polynômes de degré n définis explicitement pour tout $n \geq 0$ par

$$T_n(\zeta) = \cos(n(\arccos \zeta)), \quad -1 \leq \zeta \leq 1.$$

- Ces polynômes vérifient la relation de récurrence :

$$T_0(\zeta) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(\zeta) = \zeta$$

$$T_{n+1} = 2\zeta T_n(\zeta) - T_{n-1}(\zeta), \quad n > 0.$$

- Les points de Gauss-Tchebycheff et les poids sont donnés par

$$\zeta_j = \cos\left(\frac{(N - j + \frac{1}{2})\pi}{N}\right), \quad 1 \leq j \leq N \quad \text{et} \quad \omega_j = \frac{\pi}{N},$$

- Les points et poids de Gauss-Lobatto s'écrivent :

$$\xi_j = \cos\left(\frac{(N-j)\pi}{N}\right), \quad 0 \leq j \leq N$$

(12)

et $\rho_0 = \rho_N = \frac{\pi}{2N}, \quad \rho_j = \frac{\pi}{N}, \quad 1 \leq j \leq N-1.$

- De plus pour tout $n \geq 0$ on a

$$|T_n(\zeta)| \leq 1, \quad -1 \leq \zeta \leq 1$$

et

$$\int_{-1}^1 T_n^2(\zeta) \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = c_n \frac{\pi}{2}$$

où

$$c_n = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 0 \\ 1 & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad (13)$$

CAS DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX

Soit $\Omega = \bigcup_{k=1}^K \Lambda_k$ avec $\Lambda_k =]a_k, a_{k+1}[$, alors :

- pour tout $k = 1, \dots, K$ les nœuds et les poids de GL et GLL sont :

$$\zeta_{j,k} = a_k + (\zeta_j + 1)(a_{k+1} - a_k)/2 \quad \text{et} \quad \omega_{j,k} = (a_{k+1} - a_k) \omega_j/2$$

et

$$\xi_{i,k} = a_k + (\xi_i + 1)(a_{k+1} - a_k)/2 \quad \text{et} \quad \rho_{i,k} = (a_{k+1} - a_k) \rho_i/2.$$

- La formule de quadrature de Gauss s'écrit :

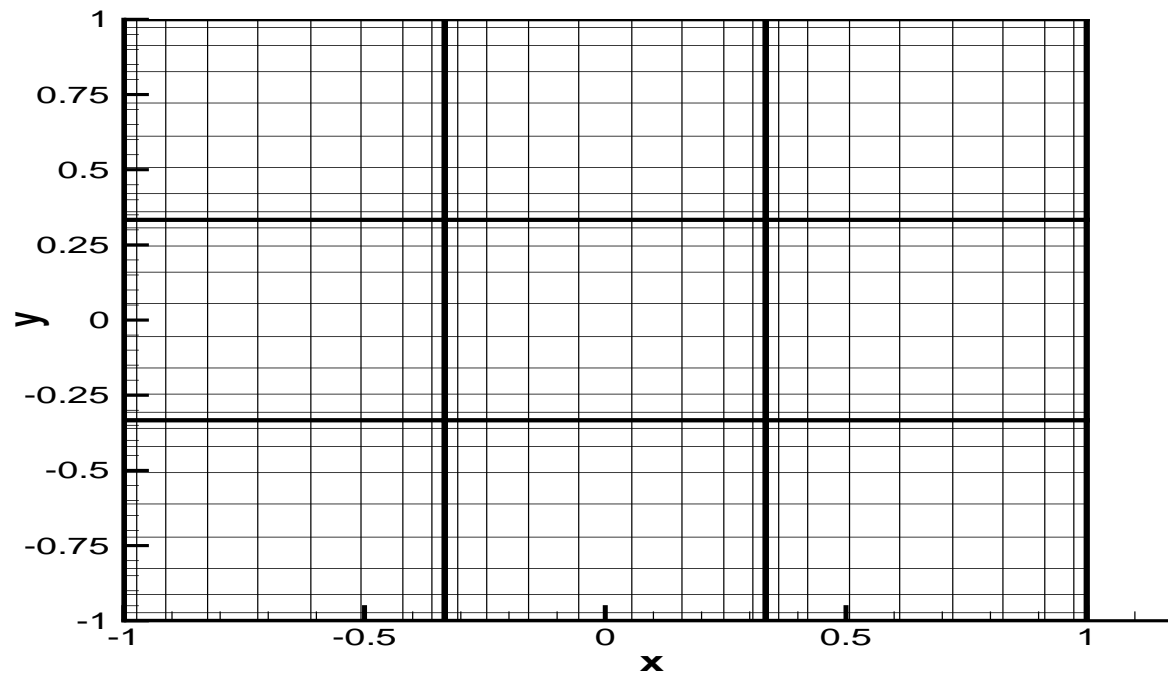
$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall \psi \in \mathcal{C}^0(\Omega), \quad (\varphi, \psi)_h = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N \varphi(\zeta_{j,k}) \psi(\zeta_{j,k}) \omega_{j,k}.$$

- La formule de Gauss-Lobatto s'écrit :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \quad \text{et} \quad \forall \psi \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \quad (\varphi, \psi)_h = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \varphi(\xi_{i,k}) \psi(\xi_{i,k}) \rho_{i,k}.$$

CAS DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX

- Le paramètre de discrétisation h est alors relatif au couple (K, N) .



Exemple de maillage type éléments spectraux ($N=9$) et ($K=3$)

Éléments spectraux pour le problème de Dirichlet

PROBLÈME CONTINUE

Le “problème exact” que nous considérons est le “prototype” des problèmes aux limites elliptiques, à savoir le problème de Dirichlet pour le Laplacien $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{dans } \Omega \\ u &= g && \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{14}$$

où f est une donnée suffisamment régulière et g est la trace sur $\partial\Omega$ d'un élément $u_0 \in H^1(\Omega)$. L'inconnue u est cherchée dans $H^1(\Omega)$.

- Le changement d'inconnue $u \rightarrow u - u_0$ et de données $f \rightarrow f - \Delta u_0$ permet de se ramener au problème de Dirichlet homogène : *trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de*

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega. \tag{15}$$

FORMULATION VARIATIONNELLE-FORMULATION FAIBLE

- La formulation variationnelle du problème (15) est : *trouver* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solution de*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_x u(x, y) \partial_x v(x, y) + \partial_y u(x, y) \partial_y v(x, y) \, dx \, dy = (f, v)$$

- Le gradient (∂_x, ∂_y) se notant ∇ , on écrira la formulation variationnelle sous la forme : *trouver* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solution de*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) \, dx \, dy = (f, v) \quad (16)$$

- La forme bilinéaire $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$, on écrira la formulation variationnelle sous la forme : *trouver* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solution de*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = (f, v). \quad (17)$$

APPROXIMATION DE GALERKIN

On se donne un sous-espace de dimension finie X_N de $H_0^1(\Omega)$, où N est un paramètre entier

- Le problème discret s'écrit :

$$\forall v_N \in X_N, \quad \int_{\Omega} \nabla u_N(x, y) \cdot \nabla v_N(x, y) \, dx \, dy = (f, v_N) \quad u_N \in X_N, \quad (18)$$

- Le problème discret **est luniquement résoluble** et on a une estimation de l'erreur entre solutions exacte et approchée

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{w_N \in X_N} \|u - w_N\|_{H^1(\Omega)}. \quad (19)$$

- *Le principe de la méthode des éléments spectraux consiste à prendre comme espaces X_N des espaces de fonctions v_N qui sont des polynômes de degré (partiel) $\leq N$ par morceaux.*

DISCRÉTISATION

- Le problème de Galerkin (18) est théoriquement un problème en dimension finie, à condition de savoir évaluer exactement les intégrales

$$\int_{\Omega} \nabla u_N(x, y) \cdot \nabla v_N(x, y) \, dx \, dy \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} f(x, y) v_N(x, y) \, dx \, dy,$$

Ceci est rarement le cas et on est amené à remplacer les intégrales ci-dessus par des approximations numériques : c'est ce qu'on appelle l'intégration numérique.

- La forme bilinéaire exacte $a(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$ sera remplacée sur $X_N \times X_N$ par une forme bilinéaire approchée a_N et le produit scalaire (f, v) sera remplacé par un produit scalaire approché $(f, v)_N$ d

\implies On obtient ainsi un nouveau problème discret :

$$\forall v_N \in X_N, \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N \quad u_N \in X_N. \quad (20)$$

MÉTHODE SPECTRALE

On s'intéresse au problème de Dirichlet homogène sur le carré Λ^2 .

- On choisit X_N dans $H_0^1(\Lambda^2)$

$$X_N = \mathcal{P}_N^0(\Lambda^2), \quad \text{où} \quad \mathcal{P}_N^0(\Lambda^2) = \{v \in \mathcal{P}_N(\Lambda^2) \mid v = 0 \text{ sur } \partial(\Lambda^2)\}.$$

- Le produit scalaire (f, v) est remplacé par le produit scalaire :

$$(f, v)_N = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N f(\xi_i, \xi_j) v(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j$$

et la forme bilinéaire $a(u, v)$ est remplacée

$$a_N(u, v) = (\partial_x u, \partial_x v)_N + (\partial_y u, \partial_y v)_N.$$

\implies Le nouveau problème discret s'écrit (20) : trouver $u_N \in \mathcal{P}_N^0(\Lambda^2)$

$$\forall v_N \in \mathcal{P}_N^0(\Lambda^2), \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N, \quad (21)$$

MÉTHODE SPECTRALE

L'exactitude des formules d'intégration numérique permet de montrer que le problème :

$$\forall v_N \in \mathcal{P}_N^0(\Lambda^2), \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N, \quad (22)$$

est équivalent au **problème de collocation** suivant

$$-\Delta u_N(\xi_i, \xi_j) = f(\xi_i, \xi_j) \quad \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq N-1 \quad u_N \in \mathcal{P}_N^0(\Lambda^2). \quad (23)$$

ÉCRITURE DU SYSTÈME ALGÈBRE

- Expression des polynômes de Lagrange : On désigne par h_i le polynôme de Lagrange caractéristique du i^{eme} point de Gauss-Lobatto. Pour tout ζ dans Λ :

$$h_i(\zeta) = -\frac{(1 - \zeta^2)L'_N(\zeta)}{N(N + 1)L_N(\xi_i)(\zeta - \xi_i)},$$

- La dérivée première de h_i est, pour $\zeta \neq \xi_i$:

$$\forall \zeta \neq \xi_i, \quad h'_i(\zeta) = \frac{L_N(\zeta)}{L_N(\xi_i)(\zeta - \xi_i)} + \frac{(1 - \zeta^2)L'_N(\zeta)}{N(N + 1)L_N(\xi_i)(\zeta - \xi_i)^2}.$$

- La dérivée seconde de h_i est, pour $\zeta \neq \xi_i$:

$$h''_i(\zeta) = \frac{L'_N(\zeta)}{L_N(\xi_i)(\zeta - \xi_i)} - 2\frac{L_N(\zeta)}{L_N(\xi_i)(\zeta - \xi_i)^2} - 2\frac{(1 - \zeta^2)L'_N(\zeta)}{N(N + 1)L_N(\xi_i)(\zeta - \xi_j)^3}.$$

ÉCRITURE DU SYSTÈME ALGÈBRE

- On suppose donc connues les valeurs de f aux points de $\Xi_N \cap \Omega$ et les valeurs de la fonction g aux points de $\Xi_N \cap \partial\Omega$. On notera respectivement ces valeurs f_{ij} et g_{ij} .
- Notre problème discrétisé est alors le suivant : *trouver* $u_N \in \mathcal{P}_N(\Omega)$ et $u_N = g$ sur $\Xi_N \cap \partial\Omega$ *solution de*

$$\forall v_N \in \mathcal{P}_N^0(\Omega), \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N \quad (24)$$

\implies Pour $g = 0$, on retrouve bien le problème (22).

\implies Il s'agit donc de calculer u_{ij} , les valeurs $u_N \in \mathcal{P}_N(\Omega)$ aux nœuds (ξ_i, ξ_j) de Ξ_N , c'est-à-dire

$$u_N(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u_{ij} h_i(x) h_j(y).$$

ÉCRITURE DU SYSTÈME ALGÈBRIQUE

- \mathcal{L} est l'ensemble des couples (i, j) , $1 \leq i, j \leq N - 1$ correspondants aux points (ξ_i, ξ_j) dans Ω ,
- \mathcal{M} est l'ensemble des (i, j) tels que (ξ_i, ξ_j) appartienne à $\partial\Omega$.

\implies Les valeurs de u_{ij} , $(i, j) \in \mathcal{M}$ sont données par les conditions aux limites, les inconnues réelles du problème sont donc les u_{ij} valeurs de u_N aux nœuds (ξ_i, ξ_j) pour $(i, j) \in \mathcal{L}$.

\implies En notant que les $(h_i(x)h_j(y))_{1 \leq i, j \leq N-1}$ forment une base de $\mathcal{P}_N^0(\Omega)$, la formulation variationnelle discrète s'écrit de la façon suivante :

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} u_{ij} a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s) = f(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s - \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} g_{ij} a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s)$$

$$1 \leq r, s \leq N - 1.$$

ÉCRITURE DU SYSTÈME ALGÈBRE

On obtient un système linéaire de $(N - 1)^2$ équations à $(N - 1)^2$ inconnues:

$$\mathbf{A}\bar{U} = \bar{F}$$

- \bar{U} est le vecteur formé des valeurs inconnues $u_{ij}, (i, j) \in \mathcal{L}$
- \mathbf{A} , dite *matrice de rigidité*, a pour coefficients les termes $a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s)$
- Le vecteur \bar{F} est formé des termes

$$f(\xi_r, \xi_s)\rho_r\rho_s - \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} g_{ij} a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s), \quad (r, s) \in \mathcal{L}$$

$\bar{F} = \mathbf{B}\mathbf{F}$, où \mathbf{F} est le vecteur ayant pour composantes

$$f(\xi_r, \xi_s) - \frac{1}{\rho_r\rho_s} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} g_{ij} a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s), \quad (r, s) \in \mathcal{L}.$$

La *matrice de masse* \mathbf{B} est diagonale et ses termes sont égaux à $\rho_i\rho_j$.

ECRITURE DU SYSTÈME ALGÈBRIQUE

Le coût de la résolution du système (35) est lié aux propriétés de la matrice \mathbf{A} :

$$\alpha_{ir} = \sum_{j=0}^N h'_i(\xi_j) h'_r(\xi_j) \rho_j = (h'_i, h'_r)_N \quad 0 \leq i, r \leq N,$$

Les coefficients de la matrice \mathbf{A} s'écrivent

$$a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s) = \alpha_{ir} \delta_{js} \rho_j + \alpha_{js} \delta_{ir} \rho_i.$$

Pour i et r compris entre 1 et $N - 1$, on a la formule

$$\begin{aligned} \alpha_{ir} &= \frac{4}{N(N+1)L_N(\xi_i)L_N(\xi_r)(\xi_i - \xi_r)^2} && \text{si } i \neq r, \\ &= \frac{2}{3(1 - \xi_i^2)L_N^2(\xi_i)} && \text{si } i = r. \end{aligned} \tag{25}$$

ECRITURE DU SYSTÈME ALGÈBRIQUE

Quelques propriétés de la matrice \mathbf{A}

- Tout comme la forme $a_N(\cdot, \cdot)$ est symétrique, la matrice \mathbf{A} l'est également.
- La matrice \mathbf{A} est pleine.
- Le nombre de condition de la matrice \mathbf{A} vérifie

$$cN^3 \leq \kappa(\mathbf{A}) \leq c'N^3$$

SYSTÈME ALGÈBRIQUE: FORMULATION FORTE

En effectuant une intégration par partie, on peut montrer, grâce à l'exactitude de la formule de quadrature, que le système (24) est équivalent au problème de collocation suivant:

$$\begin{aligned}
 -\Delta u_N(\xi_i, \xi_j) &= f(\xi_i, \xi_j) & \forall (i, j) \in \mathcal{L} \\
 u_N \in \mathcal{P}_N(\Lambda^2) \quad \text{et} \quad u_N(\xi_i, \xi_j) &= g(\xi_i, \xi_j) & \forall (i, j) \in \mathcal{M},
 \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}
 - \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} u_{ij} \left(h_i''(\xi_r) h_j(\xi_s) + h_i(\xi_r) h_j''(\xi_s) \right) &= f(\xi_r, \xi_s) \\
 - \frac{1}{\rho_r \rho_s} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} g_{ij} \left(h_i''(\xi_r) h_j(\xi_s) + h_i(\xi_r) h_j''(\xi_s) \right), & \quad 1 \leq r, s \leq N-1
 \end{aligned}$$

Ceci est également un système linéaire à $(N-1)^2$ inconnues et $(N-1)^2$ équations que l'on présente sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}},$$

Quelques propriétés de la matrice \tilde{A}

- La matrice \tilde{A} est égale à $B^{-1}A$,
- La matrice \tilde{A} n'est pas symétrique.
- Le nombre de condition de \tilde{A} est en $\mathcal{O}(N^4)$
- L'inversion de cette matrice ne peut être que plus coûteuse que celle de \mathbf{A} , ce qui est le défaut majeur de cette formulation.

RÉSOLUTION PAR MÉTHODES DIRECTES

- **Méthode d'inversion directe**

1. nécessitent le stockage de matrices de la taille de \mathbf{A} , c'est-à-dire N^{2d}
2. le nombre d'opérations est en général assez élevé, par exemple l'utilisation de la méthode de Cholesky demande (en 2-D) cN^6 opérations élémentaires pour la décomposition de \mathbf{A} .

[\implies] *Pour ces raisons ces méthodes sont abandonnées surtout pour le cas monodomaine où on est souvent amené à utiliser des polynômes d'approximation de degré assez élevé. $N = 64$*

RÉSOLUTION PAR MÉTHODES DIRECTES

Méthode dite de diagonalisations successives :

- Le caractère tensoriel de la base de $\mathcal{P}_N^0(\Omega)$ permet d'utiliser une méthode directe qui, elle, n'a besoin de stocker que des matrices de tailles N^d et donc des opérations de l'ordre de N^{d+1} .
- La méthode s'applique système fort réécrit sous la forme $\tilde{A}\mathcal{U} = \mathcal{F}$, où \mathcal{U} et \mathcal{F} sont donnés par

$$\mathcal{U}_{ij} = u_N(\xi_i, \xi_j) \text{ et } \mathcal{F}_{ij} = f(\xi_i, \xi_j).$$

qui s'écrit:

$$\mathcal{D}\mathcal{U} + \mathcal{U}\mathcal{D}^t = \mathcal{F}$$

avec

$$\mathcal{D}_{ij} = -h_j''(\xi_i), \quad 1 \leq i, j \leq N - 1.$$

RÉSOLUTION PAR MÉTHODES DIRECTES

- La matrice \mathcal{D} étant diagonalisable, soit \mathbf{P} la matrice de passage, on a alors :

$$\mathbf{P}^{-1}\mathcal{D}\mathbf{P} = \boldsymbol{\delta},$$

où $\boldsymbol{\delta}$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres de \mathcal{D} .

- Le principe de la méthode de diagonalisations successives est d'écrire le système dans la base des vecteurs propres dans chacune des directions, opération facilitée par le caractère tensoriel de la base de $\mathcal{P}_N^0(\Omega)$.

DIAGONALISATION SUCCESSIVES : ALGORITHME

1. passage dans la base des vecteurs propres pour la direction des x

$$(P^{-1}\mathcal{D}P)(P^{-1}\mathcal{U}) + P^{-1}\mathcal{U}(\mathcal{D})^t = P^{-1}\mathcal{F}$$

soit

$$\delta\tilde{\mathcal{U}} + \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{D})^t = \tilde{\mathcal{F}}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{U}} = P^{-1}\mathcal{U} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}} = P^{-1}\mathcal{F}$$

2. En recommençant l'opération dans la direction des y on obtient

$$\delta\tilde{\mathcal{U}}(P^t)^{-1} + \tilde{\mathcal{U}}(P^t)^{-1}P^t(\mathcal{D})(P^t)^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}(P^t)^{-1}$$

Le système obtenu est donc diagonal :

$$\delta\tilde{\tilde{\mathcal{U}}} + \tilde{\tilde{\mathcal{U}}}\delta = \tilde{\tilde{\mathcal{F}}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\tilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\mathcal{U}}(P^t)^{-1} \quad \text{et} \quad \tilde{\tilde{\mathcal{F}}} = \tilde{\mathcal{F}}(P^t)^{-1}$$

3. On résout ce dernier système en écrivant

$$\tilde{\tilde{\mathcal{U}}}_{ij} = \frac{\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_{ij}}{\delta_{ii} + \delta_{jj}}.$$

DIAGONALISATION SUCCESSIVES : REMARQUES

Point \oplus

- Pouvoir résoudre le problème en dimension $d \geq 2$ comme une suite de problèmes de dimension 1, avec un coût de l'ordre de $\mathcal{O}(N^{d+1})$ et une mémoire de l'ordre de $\mathcal{O}(N^d)$ pour le stockage des matrices

Points \ominus

- pas de domaines courbes, ni complexes. Pas de coefficients variables.

RÉSOLUTION PAR MÉTHODES ITÉRATIVES

Il s'agit de construire une suite $(U_n)_n$ qui converge vers U solution de $AU = \overline{F}$.
Le coût de ces méthodes est proportionnel à celui du calcul de AV

- (i) La matrice \mathbf{A} n'a jamais besoin d'être assemblée et la place mémoire nécessaire est donc majorée par une constante fois N^d .
- (ii) Le fait que les bases de polynômes soient tensorisées réduit le coût de l'opération AV : chaque itération nécessite cN^{d+1} opérations, et au total $\mathcal{N}(N)$ fois ce nombre pour converger, avec $\mathcal{N}(N)$ le nombre d'itérations nécessaire à la convergence et pour lequel on a $U_{\mathcal{N}(N)} = U$.

GRADIENT CONJUGUÉ PRÉCONDITIONNÉ (PGC)

Etape d'initialisation : On choisit un vecteur U_0 (nul par exemple) et on calcule

$$\mathcal{R}_0 = F - AU_0, \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_0 = \mathcal{Q}_0 = P^{-1}\mathcal{R}_0$$

Etape n : Tant que $\frac{\mathcal{R}_n \cdot \mathcal{R}_n}{F \cdot F} > \varepsilon$, (ε est la tolérance)

$$\alpha_n = \frac{\mathcal{R}_n \cdot \mathcal{Q}_n}{\mathcal{P}_n \cdot A\mathcal{P}_n},$$

$$U_{n+1} = U_n + \alpha_n \mathcal{P}_n,$$

$$\mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n - \alpha_n A\mathcal{P}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_{n+1} = P^{-1}\mathcal{R}_{n+1},$$

$$\beta_n = \frac{\mathcal{R}_{n+1} \cdot \mathcal{R}_{n+1}}{\mathcal{R}_n \cdot \mathcal{R}_n},$$

$$\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{Q}_{n+1} + \beta_n \mathcal{P}_n.$$

※ P^{-1} est le préconditionneur.

GRADIENT CONJUGUÉ PRÉCONDITIONNÉ (PGC)

- Le nombre de condition intervient dans les méthodes itératives par son influence sur le nombre d'itérations
- Pour la méthode du gradient conjugué, on a la relation suivante :

$$\mathcal{N}(N) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa(A)}\right)$$

↪ C'est-à-dire dans notre cas $\mathcal{N}(N) = \mathcal{O}\left(N^{\frac{3}{2}}\right)$.

- Le nombre d'itérations croît assez vite en fonction de N . Pour éviter ce type de comportement, on **optimise le choix du préconditionneur** pour que le nombre de condition de $\kappa(P^{-\frac{1}{2}}AP^{-\frac{1}{2}})$ (c'est-à-dire le quotient de la plus grande valeur propre de $P^{-1}A$ par la plus petite) soit inférieur à $\kappa(A)$.

EXEMPLES DE PRÉCONDITIONNEURS

Préconditionnement par la diagonale: \mathbf{P} est diagonale et ses termes diagonaux sont ceux de la matrice \mathbf{A} , c'est-à-dire $\alpha_{jj}\rho_k + \alpha_{kk}\rho_j$. On montre que pour ce choix on a

$$\kappa(P^{-\frac{1}{2}}AP^{-\frac{1}{2}}) \leq cN^2$$

Préconditionnement par différences finies: \mathbf{P} est choisie égale à la matrice issue de discrétisation du même problème par différences finies à l'ordre 2 sur la grille Ξ_N :

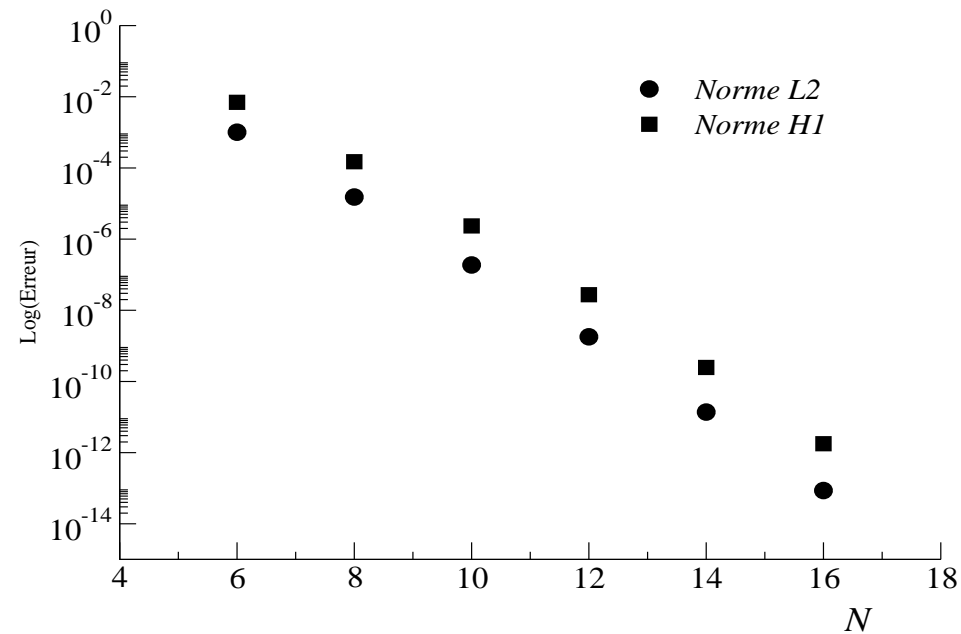
$$\frac{-2}{\delta_{j-1}(\delta_j + \delta_{j-1})}u_{j-1} + \frac{2}{\delta_{j-1}\delta_j}u_j + \frac{-2}{\delta_j(\delta_j + \delta_{j-1})}u_{j+1} = f_j, \quad j = 1, \dots, N-1$$

On montre que ce choix est optimal.

$$\kappa(P^{-\frac{1}{2}}AP^{-\frac{1}{2}}) = \pi^2/4$$

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

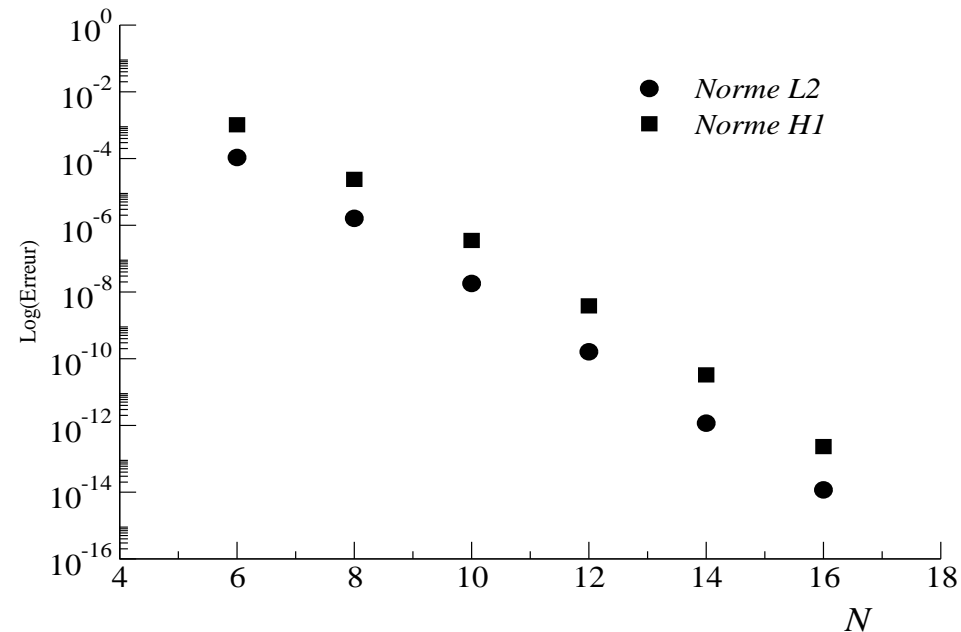
$f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ et conditions aux limites $g = 0$. La solution exacte est $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.



Erreur d'approximation : cas d'une solution régulière tensorielle

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

On s'intéresse maintenant au cas où la solution attendue n'est pas tensorielle, on choisit pour cela comme second membre pour (14) la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(xy)$. Ce problème muni en plus des bonnes conditions aux limites admet comme



Erreur d'approximation : cas d'une solution régulière non tensorielle

RÉSULTATS NUMÉRIQUES: SOLUTION PEU RÉGULIÈRE

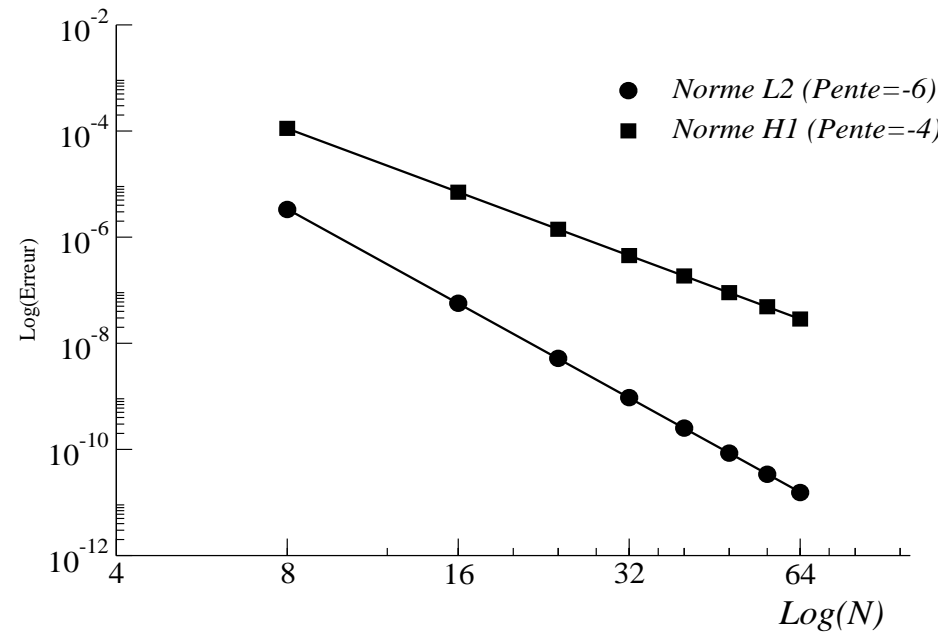
On choisit pour cela l'approximation de la solution exacte définie sur $]0, 1[^2$ par :

$$u = r^2(\log r \sin 2\theta + \theta \cos 2\theta)$$

- Elle satisfait $\Delta u = 0$
- Les conditions aux limites associées sont régulières et sont données par :
 - Sur $y = 0$, $g = 0$, sur $x = 0$, $g(y) = -\frac{\pi}{2}y^2$
 - Sur les autres côtés, c'est la restriction de $xy \log(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

↪ Contrairement aux deux exemples précédents, la solution $(\in H^{3-\epsilon})$.

RÉSULTATS NUMÉRIQUES: SOLUTION PEU RÉGULIÈRE



Erreur d'approximation : cas d'une solution peu régulière et non tensorielle

\implies La figure illustre en log-log la vitesse de convergence en norme L^2 et H^1 . Elle démontre que la convergence n'est plus exponentielle mais algébrique. Le taux de convergence est de -6 pour la norme L^2 et de -4 pour H^1 .

QU'EN EST IL DU PROBLÈME DE NEUMAN ?

On rappelle qu'il s'agit du problème continu : *trouver u solution de*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g && \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{26}$$

où f est une donnée suffisamment régulière et g est la trace sur $\partial\Omega = \cup_{i=1,4}\Gamma_i$ du flux de l'inconnue u cherchée à moyenne nulle dans $H^1(\Omega)$