



# Des écoulements compressibles aux écoulements faiblement dilatables.

Virginie DARU<sup>(1),(2)</sup>

- 1- Laboratoire DynFluid, ENSAM, 151 Bd. de l'Hôpital, F-75013 PARIS
- 2- LIMSI - UPR CNRS 3251, B.P.133, F-91403 Orsay Cedex

19 mai 2015



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>II</b>	<b>Modélisation des écoulements compressibles.</b>	<b>9</b>
II.1	Equations de Navier-Stokes pour le compressible et analyse à bas Mach. . .	9
II.2	Un exemple d'écoulement simple. . . . .	15
II.3	Analyse asymptotique et modèle pour les écoulements à faible Mach. . . .	21
<b>III</b>	<b>Méthodes numériques.</b>	<b>25</b>
III.1	Méthodes numériques pour le compressible. . . . .	25
III.2	Méthodes numériques pour les écoulements contraints. . . . .	36
III.2.1	Écoulements incompressibles. . . . .	36
III.2.2	Écoulements faible Mach. . . . .	42
III.3	Un aperçu sur les méthodes "all speed". . . . .	46
<b>IV</b>	<b>Écoulements diphasiques.</b>	<b>49</b>
IV.1	Impact de gouttes. . . . .	49
IV.2	Écoulement liquide gaz en enceinte fermée. . . . .	53



# Chapitre I

## Introduction

Les écoulements compressibles sont caractérisés par des phénomènes de transport, transport convectif et propagation d'ondes. Dans un tel écoulement coexistent deux vitesses de transport, la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son. Les perturbations acoustiques se propagent à la vitesse du son, tandis que l'entropie, la vorticité et les scalaires passifs sont transportés à la vitesse de l'écoulement. Lorsque ces deux vitesses sont du même ordre de grandeur, le nombre de Mach de l'écoulement est de l'ordre de 1 et l'écoulement est dominé par des ondes de compression et de détente de forte intensité. Les difficultés spécifiques pour la simulation numérique de ces écoulements sont essentiellement dues à l'apparition de discontinuités dans l'écoulement (chocs ou discontinuités de contact), et à la nécessité lorsque existent aussi des petites structures dans cet écoulement (turbulence ou ondes acoustiques) de développer des méthodes numériques à la fois robustes et précises. Lorsque le nombre de Mach de l'écoulement devient petit, l'amplitude des ondes de détente et de compression diminue, jusqu'à devenir des ondes acoustiques transportant de très faibles variations de pression, de masse volumique et de vitesse. La vitesse du son devient alors très grande devant celle de l'écoulement, et une séparation d'échelles se produit entre l'acoustique et la convection. Traditionnellement, un écoulement incompressible, caractérisé par la contrainte  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  sur le champ de vitesse, est obtenu par passage à la limite  $M \rightarrow 0$ . Cependant cette limite est singulière, et un code de simulation pour les écoulements compressibles ne peut pas être utilisé dans le cas strictement incompressible. En effet la partie fluide parfait des équations en compressible forme un système hyperbolique, et dégénère dans le cas incompressible vers un système elliptique-hyperbolique, la vitesse du son devenant infinie. Le modèle incompressible a ainsi donné lieu au développement de méthodes numériques et de codes spécifiquement adaptés à ce cas. On peut cependant utiliser un code compressible pour traiter des écoulements à faible nombre de Mach. Mais l'acoustique, bien que propageant seulement une petite partie de l'énergie présente dans la partie fluctuante de l'écoulement, amène une contrainte de stabilité très sévère sur le pas de temps, celui-ci étant inversement proportionnel à la vitesse du son. Il peut aussi apparaître des problèmes de précision du fait des échelles très

différentes en jeu dans ces écoulements.

Devant cette difficulté, il apparaît généralement préférable, pour simuler un écoulement à très faible Mach, de partir d'un modèle dans lequel les ondes acoustiques ont été filtrées (à moins que l'on s'intéresse directement à l'acoustique). Ces modèles peuvent être vus comme une généralisation du modèle incompressible, au sens où ils imposent une contrainte sur le champ de vitesse qui n'est pas  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  mais  $\nabla \cdot \mathbf{v} = f(\mathbf{x}, t)$ ,  $f$  étant une fonction déterminée par ailleurs. On appelle de tels écoulements des écoulements contraints [25]. Dans ces écoulements les phénoménologies grande vitesse (compressions, détentes, chocs) ne peuvent apparaître du fait que la masse volumique devient indépendante de la pression.

Construire des modèles pour les écoulements à faible Mach est d'un intérêt majeur du fait qu'ils sont omniprésents dans la nature et dans la technologie. On retrouve ce type d'écoulement dans la circulation atmosphérique et océanique, dans les moteurs à combustion interne, dans les turbines, les échangeurs de chaleur, etc. Les écoulements avec transfert de chaleur par convection et conduction, lorsque les différences de température sont grandes, sont des écoulements compressibles à faible Mach. Ils sont présents dans un grand nombre de situations, telles que les collecteurs solaires, le refroidissement des réacteurs nucléaires, les équipements électroniques. Beaucoup de procédés industriels, comme le dépôt de spray ou le jet d'eau, nécessitent de plus la prise en compte de fluides ayant des propriétés différentes.

Parler, chanter ou jouer d'un instrument de musique sont aussi des exemples de tels écoulements. L'aéroacoustique (qui étudie le bruit engendré par un écoulement turbulent) est un problème crucial aujourd'hui dans la conception des aéronefs et des véhicules terrestres. Dans ce cas on s'intéresse à l'acoustique produite en champ lointain par les structures tourbillonnaires d'un écoulement essentiellement incompressible. Bien que la simulation directe (à partir de la résolution des équations compressibles) du bruit engendré par un écoulement soit aujourd'hui une voie active de recherche, grâce à la puissance de calcul offerte par les ordinateurs massivement parallèles, les méthodes intégrales qui séparent le calcul aérodynamique et le calcul de l'acoustique restent beaucoup plus efficaces.

Ainsi, la variété des écoulements à faible Mach est grande et fait intervenir des échelles spatiales et temporelles multiples, et les approches pour simuler un écoulement à faible Mach sont également variées. Nous nous intéresserons plus particulièrement dans ce qui suit à des écoulements dans lesquels l'acoustique joue un rôle insignifiant, ce qui est le cas des écoulements en domaine dit acoustiquement compact, pour lesquels la longueur d'onde acoustique est grande devant la taille du domaine.

Bien que les méthodes numériques aient été construites de manière spécifique pour le compressible ou l'incompressible, il y a également un nombre important de travaux cherchant à développer une méthode capable de traiter tous les régimes, depuis l'incom-

pressible jusqu'à l'hypersonique. Deux approches ont été adoptées, qui consistent à étendre les capacités d'une méthode numérique limitée soit au cas compressible soit au cas incompressible vers l'autre régime. Il reste cependant que les méthodes spécifiquement adaptées à un régime sont généralement plus efficaces.

Ce cours vise à donner une vue d'ensemble de la modélisation et de la simulation des écoulements compressibles, quelque soit le nombre de Mach, et à mettre en évidence les difficultés propres à chaque régime. Pour plus de développements, on pourra se référer avec profit aux livres [20], [21], [29], [30], [48], [51], [64], [65], [62] [15], [88], [80], [90] parmi d'autres. Nous commencerons par caractériser les effets de la compressibilité dans un écoulement, puis à partir d'une analyse asymptotique nous établirons le système limite obtenu lorsque le nombre de Mach tend vers 0. Nous aborderons ensuite les méthodes numériques propres à chaque régime, et donnerons quelques éléments sur les méthodes "all speed". Enfin nous présenterons quelques problèmes spécifiques aux écoulements diphasiques.



# Chapitre II

## Modélisation des écoulements compressibles.

### II.1 Equations de Navier-Stokes pour le compressible et analyse à bas Mach.

Les écoulements de fluides compressibles sont gouvernés par le système des équations de Navier-Stokes (écrites ici sous forme dimensionnelle) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \mathbf{v}) \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de l'écoulement,  $p$  la pression,  $\rho$  la masse volumique,  $T$  la température,  $E = e + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  l'énergie totale, avec  $e$  l'énergie interne,  $\bar{\bar{\tau}} = -\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{D}}$  le tenseur des contraintes visqueuses pour un fluide Newtonien,  $\bar{\bar{D}}$  le tenseur des taux de déformation,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $k$  la conductivité thermique. Le système (II.1) est écrit sous forme conservative, et traduit la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie tout au long de l'évolution de l'écoulement. Ce système doit être complété par une loi d'état, obtenue par la thermodynamique, nous utiliserons dans tout ce qui suit la loi d'état des gaz parfaits :

$$p = (\gamma - 1) \rho e, \quad (\text{II.2})$$

qui peut aussi s'écrire  $p = r \rho T$ , où  $r$  est la constante du gaz parfait considéré et  $\gamma = c_p / c_v$  le rapport (supposé constant) des chaleurs spécifiques. Dans le cas du gaz parfait, la relation différentielle  $dp = c^2 d\rho + (\gamma - 1) \rho T dS$  permet de calculer la vitesse du son  $c$  dans l'écoulement, telle que  $c^2 = dp/d\rho|_S$ , soit  $c = (\gamma p / \rho)^{\frac{1}{2}} = (\gamma r T)^{\frac{1}{2}}$ . Dans le système

II.1, le membre de gauche représente la partie "fluide parfait" des équations, tandis que le membre de droite traduit les effets de la viscosité et de la conduction thermique (rappelons qu'un fluide parfait est non visqueux et non conducteur de la chaleur). Notons que dans un écoulement compressible, les problèmes dynamique et thermique sont fortement couplés (à travers la loi d'état), l'équation d'énergie permettant de calculer la pression (à la différence des écoulements incompressibles, pour lesquels les problèmes dynamique et thermique sont découplés ou faiblement couplés si la viscosité dépend de la température. Ce découplage traduit la différence de nature de la pression dans les deux types d'écoulements, que nous allons mettre en évidence dans la suite).

De manière générale, les écoulements compressibles sont caractérisés par la présence d'ondes. On rencontre trois grands types d'ondes : des ondes simples (de détente ou de compression) à travers lesquelles les propriétés de l'écoulement varient continument, des ondes de choc et des discontinuités de contact. Les deux dernières sont des discontinuités, à travers lesquelles les variables caractéristiques de l'écoulement subissent des sauts. Les ondes de choc sont des ondes de compression et ont une vitesse de propagation propre, tandis que les discontinuités de contact sont des surfaces de discontinuité matérielles emportées de façon passive à la vitesse de l'écoulement. Les ondes sont la manifestation des effets de la compressibilité dans l'écoulement, et disparaissent dans un écoulement incompressible (sauf éventuellement les discontinuités de contact : exemple d'une interface entre deux fluides dans un écoulement diphasique). On peut illustrer ce phénomène de propagation d'ondes sur un cas d'écoulement très simple à mettre en oeuvre : le tube à choc. Dans un tube rempli de gaz est installée une membrane qui sépare une chambre haute pression et une chambre basse pression. La pression est plus élevée dans la chambre de gauche (état  $l$ ) que dans celle de droite (état  $r$ ). A l'instant initial on casse la membrane, et un écoulement composé d'ondes séparant des états uniformes s'établit : une onde de choc se propage dans la chambre basse pression, suivie d'une discontinuité de contact, et une onde de détente se propage dans la chambre haute pression. La solution à un instant  $t > 0$  est représentée figure II.1. On remarquera que la discontinuité de contact n'est visible que sur la masse volumique, la pression et la vitesse étant continues à travers ce type d'onde. Le gaz est progressivement mis en mouvement dans la zone centrale du tube, entre le choc et la détente. Au voisinage de la paroi du tube, l'écoulement crée une couche limite qui reste cependant confinée sur une faible épaisseur si le nombre de Reynolds est grand. En dehors de la zone de mise en mouvement du gaz, celui-ci reste au repos dans son état initial. On voit clairement sur cet exemple que les effets de compressibilité sont associés à la notion de **vitesse de propagation de l'information** dans l'écoulement. En effet, lorsqu'une perturbation est produite en un point donné, le fluide environnant en est informé avec un retard dû au temps mis par les ondes qui propagent l'information pour se déplacer. Dans un écoulement incompressible, la propagation des informations est instantanée et on peut considérer que dans un tel écoulement la vitesse de propagation

des ondes est infinie.

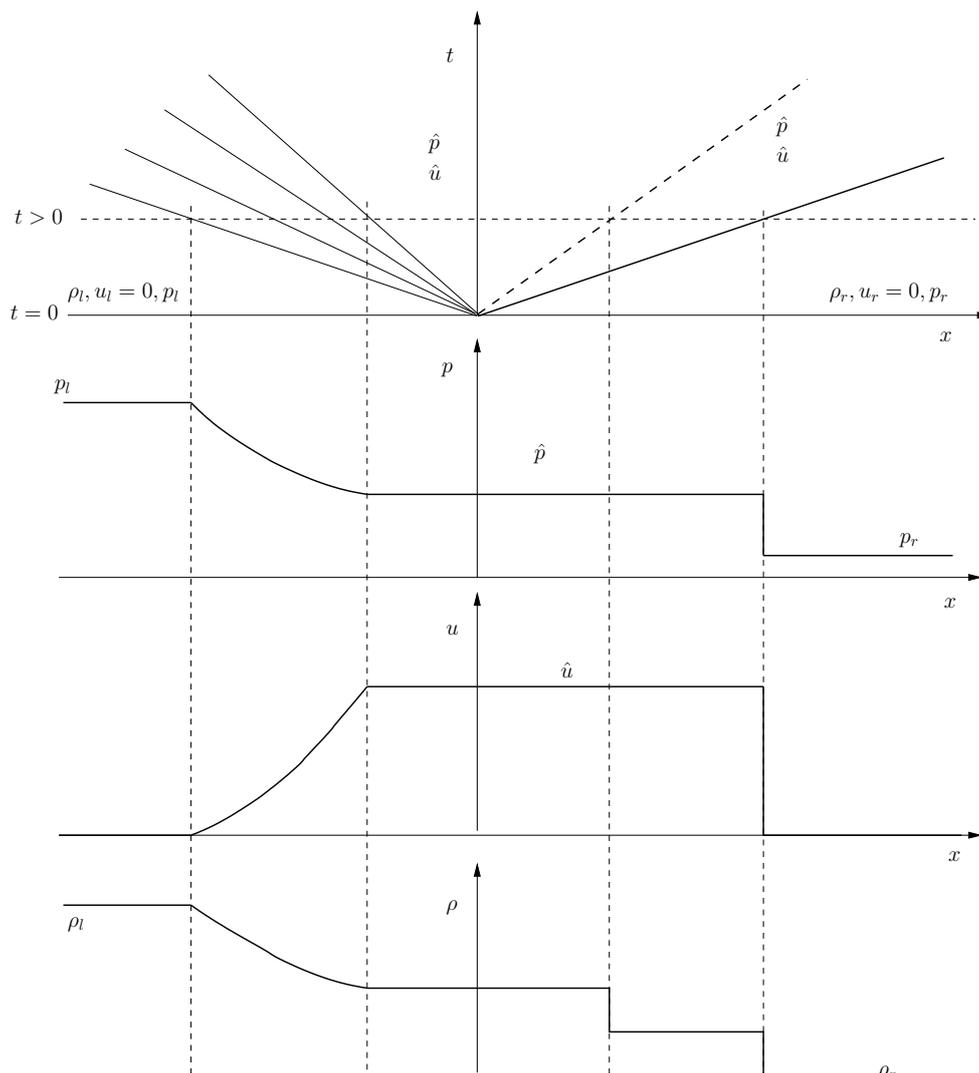


FIG. II.1 – Problème du tube à choc : diagramme  $(x,t)$  et courbes de pression, vitesse et masse volumique à  $t > 0$ .

Nous allons nous attacher dans ce qui suit à mettre en évidence ce qui dans le modèle (II.1)-(II.2) est propre aux effets de compressibilité et à la génération d'ondes. Pour cela nous nous limiterons au cas du fluide parfait, et considérons les équations d'Euler. Nous commençons par nous placer dans le cas unidimensionnel, non visqueux. Le système (II.1) devient le système des équations d'Euler 1D, qui s'écrivent sous forme condensée :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3})$$

avec  $w = (\rho, \rho u, \rho E)^T \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  le vecteur des variables conservatives,  $f(w) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho E u + p u)^T$  la fonction flux. Dans la suite nous appellerons un "état" une

valeur particulière de  $w$ , c'est à dire de la pression, de la masse volumique et de la vitesse, et de toutes les grandeurs qui s'en déduisent.

Supposons que la solution de II.3 soit assez régulière. On peut alors réécrire le système (II.3) sous forme non conservative, en faisant apparaître la matrice jacobienne  $A(w) = \frac{df}{dw}$  associée au système :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.4})$$

La matrice  $A$  s'écrit :

$$A(w) = \frac{df}{dw} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\gamma-1}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\frac{\gamma-1}{2}u^2 - H)u & H - (\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

$H$  étant l'enthalpie totale définie par  $H = E + p/\rho$ . Le système (II.3) ne peut être écrit que dans les zones régulières de l'écoulement (donc où il n'y a pas de chocs). Le système (II.3) est strictement hyperbolique, c'est à dire que la matrice  $A$  a trois valeurs propres réelles et distinctes  $\lambda^1(w), \lambda^2(w), \lambda^3(w)$  (que nous ordonnerons par valeurs croissantes), et est diagonalisable.  $A$  possède donc trois vecteurs propres à droite  $r^1(w), r^2(w), r^3(w)$  (vecteurs-colonne) qui forment une base de  $\mathbb{R}^3$ , et de même trois vecteurs propres à gauche  $l^1(w), l^2(w), l^3(w)$  (vecteurs-ligne). On a :

$$\lambda^1 = u - c, \quad \lambda^2 = u, \quad \lambda^3 = u + c$$

La matrice  $A$  ayant toutes ses valeurs propres réelles et étant diagonalisable, le système II.3 (ou II.4) est **hyperbolique** (c'est aussi le cas plus généralement du système des équations d'Euler en 2D ou en 3D). Notons que ces valeurs propres, qui représentent les vitesses de transport des informations à l'intérieur de l'écoulement, sont respectivement la vitesse du fluide, et la vitesse du son relativement à la vitesse du fluide dans les deux directions  $x$  et  $-x$ . Dans un écoulement incompressible, ces deux dernières vitesses ont "disparu", puisque la vitesse du son est infinie, et donc les informations correspondantes sont instantanément propagées à travers tout l'écoulement (ce qui explique notamment que l'on ne puisse pas calculer un écoulement incompressible en utilisant une méthode purement explicite).

Si l'on construit la matrice de passage  $R = [r^1, r^2, r^3]$ , on peut réécrire II.4 de manière à diagonaliser le système, en utilisant la relation  $A = R\Lambda R^{-1}$ , avec  $\Lambda = \text{diag}(u - c, u, u + c)$ . Il vient :

$$R^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda R^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (\text{II.6})$$

et en introduisant le vecteur  $U$  des variables dites caractéristiques, défini par  $\frac{\partial U}{\partial t} = R^{-1} \frac{\partial w}{\partial t}$  et  $\frac{\partial U}{\partial x} = R^{-1} \frac{\partial w}{\partial x}$ , II.6 devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda R^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (\text{II.7})$$

## II.1. EQUATIONS DE NAVIER-STOKES POUR LE COMPRESSIBLE ET ANALYSE À BAS MACH

soit encore  $\frac{dU_j}{dt} = 0$  sur  $\frac{dx}{dt} = \lambda^j$ , pour  $j = 1, 2, 3$ . Le calcul donne (pour  $d = \partial/\partial t, \partial/\partial x$ ):

$$dU = R^{-1}dw = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(dp - \rho cdu) \\ c^2 d\rho - dp \\ \frac{1}{2}(dp + \rho cdu) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.8})$$

Ces équations expriment donc que dans un écoulement régulier (*i.e.* sans chocs), les quantités  $dp \pm \rho cdu$  sont nulles le long des courbes caractéristique  $\frac{dx}{dt} = u \pm c$  (propagation des ondes acoustiques), et que  $dp = c^2 d\rho$  le long des trajectoires (écoulement isentropique). On définit le nombre de Mach  $M = u/c$ . Si la vitesse de l'écoulement est faible (Mach petit), il peut toujours exister des ondes de choc, mais elles sont nécessairement de faible intensité et on peut les considérer comme isentropiques (la variation de l'entropie à travers une onde de choc est en  $\mathcal{O}(M^2 - 1)^3$ ), dans un référentiel lié à l'onde). Les relations que nous venons d'établir peuvent donc également s'appliquer à un écoulement comportant des chocs de faible intensité.

En résumé, lorsque l'écoulement est régulier ou sans chocs forts, il est isentropique et on peut écrire partout  $dp = c^2 d\rho$ , ou de façon équivalente  $p/\rho^\gamma = cte = p_0/\rho_0^\gamma$ . La pression est donc uniquement déterminée par la masse volumique. La température s'écrit, en utilisant la relation d'isentropie et la loi d'état des gaz parfaits:  $T = \frac{p_0}{r\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1}$ . L'équation pour la température obtenue à partir de l'équation d'énergie de II.3 s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1)T \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.9})$$

et en portant la relation précédente  $T = \frac{p_0}{r\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1}$  dans II.9, on constate qu'on retrouve l'équation de continuité. L'équation pour la température est donc redondante et peut être supprimée.

A travers une onde de compression ou de détente, qui "fabriquent" notre écoulement, on a donc deux relations entre les variations des quantités primitives  $p, \rho$  et  $u$ , soit:  $dp = c^2 d\rho$ , et  $dp = \rho cdu$  ou  $dp = -\rho cdu$ . Ceci nous permet d'évaluer l'ordre de grandeur des variations  $dp$  et  $d\rho$ . On en tire en effet :

$$\frac{dp}{\rho c^2} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{du}{c} = \mathcal{O}(M). \quad (\text{II.10})$$

Voyons maintenant ce que cela implique dans les équations isentropiques. Nous ne considérons que l'équation de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et les réécrivons, en séparant les termes purement convectifs et les autres :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{c} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \mathcal{O}(M) \quad \mathcal{O}(M^2) \quad \mathcal{O}(M) \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c^2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \mathcal{O}(M) \quad \mathcal{O}(M^2) \quad \mathcal{O}(M) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Si nous considérons une échelle temporelle liée à la vitesse des ondes, alors dans le cas où  $M$  est petit on a  $dt \sim dx/c$  et les termes convectifs apparaissent d'ordre  $M^2$  dans le système II.11 alors que les autres, qui expriment les effets de compressibilité, sont d'ordre  $M$ . Le système dominant à l'échelle acoustique est donc le système partiel :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad (\text{II.12})$$

où l'on a utilisé la relation d'isentropie et noté la variable temporelle  $\tau$  pour indiquer qu'il s'agit d'une échelle de temps relative à l'acoustique. On peut donc imaginer, lorsque  $M$  devient petit, de résoudre différemment les deux sous-systèmes, II.12 et le système purement advectif :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

où cette fois le temps est relatif à l'échelle de l'advection. Les temps  $t$  et  $\tau$  sont reliés par la relation  $\tau = Mt$ . Une telle stratégie de découplage de ces deux sous-système est mise en oeuvre pour traiter un problème diphasique en section IV.

Si l'on revient maintenant au cas multidimensionnel, le système des équations d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f_1(w)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(w)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.14})$$

avec  $\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3)^T$  le vecteur vitesse,  $w = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho E)^T$  le vecteur des variables conservatives,  $f_1(w) = (\rho u_1, \rho u_1^2 + p, \rho u_1 u_2, \rho u_1 u_3, \rho E u_1 + p u_1)^T$ ,  $f_2(w) = (\rho u_2, \rho u_1 u_2, \rho u_2^2 + p, \rho u_2 u_3, \rho E u_2 + p u_2)^T$ ,  $f_3(w) = (\rho u_3, \rho u_1 u_3, \rho u_2 u_3, \rho u_3^2 + p, \rho E u_3 + p u_3)^T$  les fonctions flux. L'écriture sous forme non conservative de II.14 fait apparaître 3 matrices jacobiniennes,  $A_i = df_i/dw$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$ , qui sont diagonalisables (mais pas dans la même base) et ont pour valeurs propres  $(u_i - c, u_i, u_i + c)$ , la valeur propre  $u_i$  étant triple. Le nombre de Mach est défini par  $M = \frac{|\mathbf{v}|}{c}$ . Les variables caractéristiques  $U_1, U_2, U_3$  relatives à chacune des directions s'écrivent :

$$dU_1 = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{dp}{2} - \rho c \frac{du_1}{2} \\ c^2 d\rho - dp \\ \rho du_2 \\ \rho du_3 \\ \frac{dp}{2} + \rho c \frac{du_1}{2} \end{pmatrix}, \quad dU_2 = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{dp}{2} - \rho c \frac{du_2}{2} \\ c^2 d\rho - dp \\ \rho du_1 \\ \rho du_3 \\ \frac{dp}{2} + \rho c \frac{du_2}{2} \end{pmatrix}, \quad dU_3 = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{dp}{2} - \rho c \frac{du_3}{2} \\ c^2 d\rho - dp \\ \rho du_1 \\ \rho du_2 \\ \frac{dp}{2} + \rho c \frac{du_3}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.15})$$

Lorsque  $M$  est petit, l'écoulement devient isentropique et le sous-système acoustique

s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \end{cases} . \quad (\text{II.16})$$

Voyons maintenant ce que donne le système acoustique II.16 à l'échelle du temps  $t$ . En effectuant une intégration en temps du système sur un intervalle de temps  $\delta t = \frac{1}{M} \delta \tau$ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{p(t + \delta t) - p(t)}{\delta t} + \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = 0 \\ \frac{\mathbf{v}(t + \delta t) - \mathbf{v}(t)}{\delta t} + \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} \frac{1}{\rho} \nabla p d\tau = 0 \end{cases} , \quad (\text{II.17})$$

et on peut écrire, pour toute fonction  $f$ ,  $\frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} f(\tau) d\tau = f(t + \frac{\delta t}{2}) + \mathcal{O}(\delta t^2)$ . A l'échelle  $t$ , on obtient donc une approximation à l'ordre 2 en temps du même système à l'échelle convective, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \end{cases} . \quad (\text{II.18})$$

Cependant, dans le système II.18, on a maintenant  $dt \sim dx/|\mathbf{v}|$ . Si l'on applique une règle de moindre dégénérescence, on constate que la seule solution est que les dérivées temporelle et spatiale de la pression ne sont plus du même ordre de grandeur. La première équation nous donne  $dp \sim \rho c^2$ , c'est à dire la pression thermodynamique, tandis que la deuxième nous donne  $dp \sim \rho |\mathbf{v}|^2$ , soit une pression dynamique. Cela montre que la pression s'est décomposée en une pression thermodynamique  $p_0$  uniforme en espace, et une pression dynamique  $p_2 \sim M^2 p_0$  beaucoup plus petite, soit  $p(\mathbf{x}, t) = p_0(t) + p_2(\mathbf{x}, t)$ . A l'échelle convective, les ondes acoustiques, d'ordre  $M$ , sont effacées. Si la pression  $p_0$  (qui traduit les effets de compression en volume) ne dépend pas du temps (en fonction des conditions aux limites du problème), alors la première équation de II.18 se réduit à  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathcal{O}(M^2)$ . On voit donc que la divergence de la vitesse tend vers 0 quadratiquement en  $M$ , et que l'on tend bien vers un écoulement incompressible. Le sous-système acoustique fabrique donc la pression  $p_2$  qui contrôle la divergence de la vitesse. Par ailleurs si  $p_0$  est constant alors la masse volumique l'est aussi, soit  $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0$ . En prenant la divergence de II.18<sub>2</sub>, on peut écrire une équation vérifiée par la pression sous la forme :

$$\nabla \cdot \nabla p = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{II.19})$$

qui est l'analogie de l'équation de Poisson que l'on résout pour le calcul de la pression en incompressible.

## II.2 Un exemple d'écoulement simple.

$\Upsilon$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.8
M	1.26	0.63	0.25	0.13	0.06	0.016

TAB. II.1 – Nombre de Mach en fonction de la période  $\Upsilon$ .

Cet exemple simple est destiné à illustrer la transition d'un écoulement compressible à un écoulement faible Mach. Nous considérons un système fermé composé d'un piston se déplaçant à l'intérieur d'un cylindre fermé rempli de gaz initialement au repos, de pression  $p_0 = 10^5$  Pa et de masse volumique  $\rho_0 = 1$  kg/m<sup>3</sup>. Le piston suit une loi de déplacement sinusoïdale :  $x_p(t) = \frac{a}{2}(1 - \cos \omega t)$ , avec  $x_p(t)$  la position instantanée du piston,  $l_0$  la longueur initiale de la cavité remplie de gaz,  $\omega = 2\pi/\Upsilon$  la pulsation,  $\Upsilon$  étant la période,  $a$  l'amplitude de déplacement du piston. Si l'on néglige les effets visqueux et la conduction de la chaleur, cet écoulement est gouverné par les équations d'Euler 1D. Pour traiter numériquement ce problème, il faut mettre en place une stratégie spécifique pour prendre en compte la taille variable du domaine gazeux. On peut soit utiliser une approche ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian), dans laquelle la taille des mailles est variable en temps, soit une approche de type "Immersed Boundary Conditions", dans laquelle des conditions aux limites spécifiques sont écrites sur le piston. C'est cette dernière approche qui est suivie dans les simulations qui sont présentées ici.

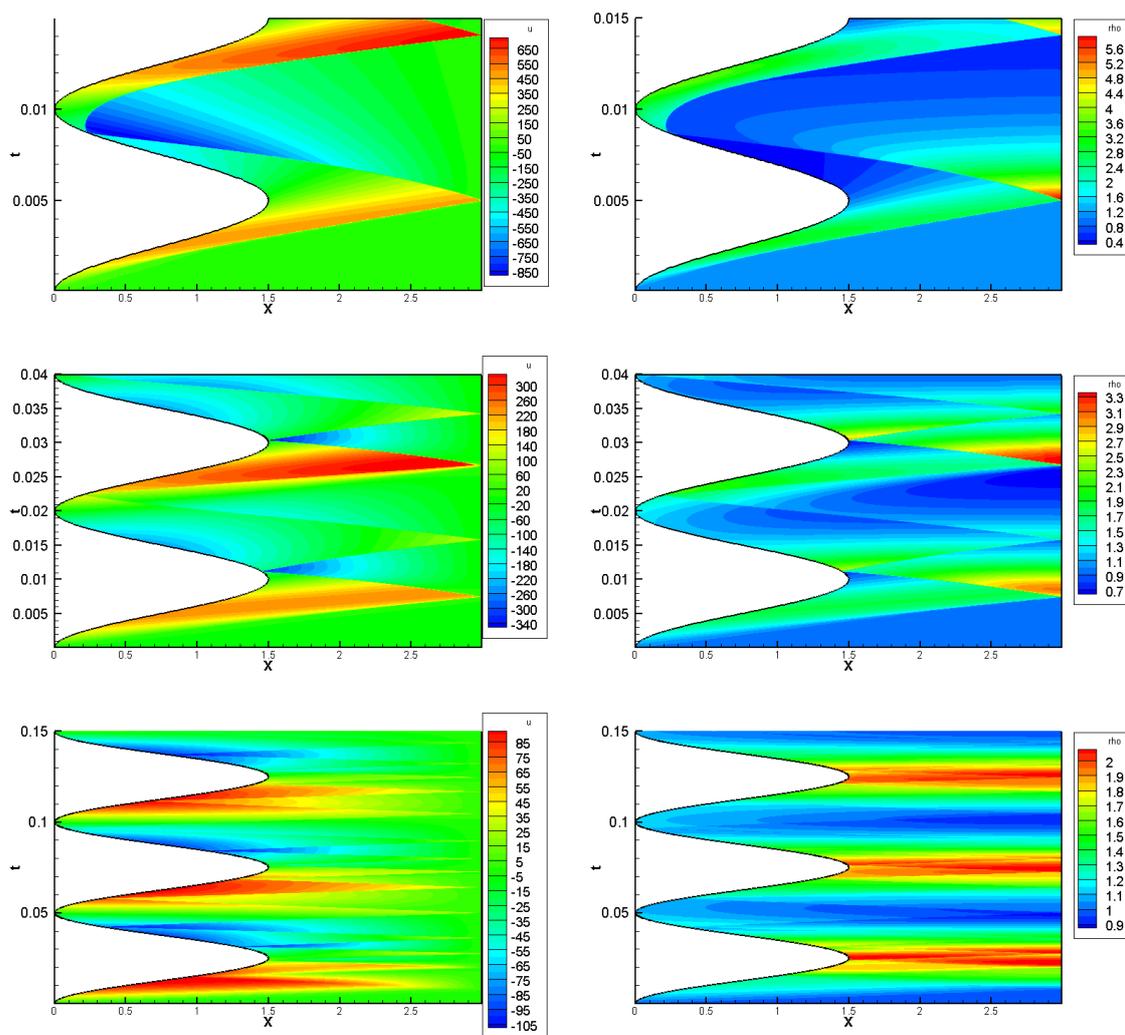
On présente les résultats obtenus pour différentes valeurs de la période  $\Upsilon$ . L'amplitude de déplacement est maintenue constante à la valeur  $a = l_0/2$ , avec  $l_0 = 3$  m. La période de déplacement du piston varie de  $\Upsilon = 0.01$  s à  $\Upsilon = 0.8$  s. Du fait de la condition aux limites sur la vitesse, les particules de gaz en contact avec la paroi du piston ont toujours la vitesse du piston  $V_p(t) = \frac{dx_p}{dt}$ .  $V_p$  varie de façon inversement proportionnelle à  $\Upsilon$ , et donc au fur et à mesure que  $\Upsilon$  croît les ondes acoustiques peuvent effectuer un plus grand nombre d'aller-retours dans la cavité à chaque période du piston. En effet elles se propagent à la vitesse du son, qui elle ne dépend pas de  $\Upsilon$  mais uniquement de l'état thermodynamique du gaz. Si l'on construit un nombre de Mach  $M$  sur l'état initial du gaz et la vitesse maximum atteinte par le piston, soit  $M = \frac{a}{2}\omega/\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ , on obtient les valeurs récapitulées dans le tableau II.1.

On constate donc que l'on passe d'un écoulement supersonique à un écoulement à très faible Mach. Le changement de régime est illustré sur les figures II.2 et II.3. La figure II.2 montre les isocontours de la vitesse et de la masse volumique du fluide. Le régime fortement compressible ( $\Upsilon$  petit) est caractérisé par la présence d'ondes de choc et de détente. On constate que la diminution du nombre de Mach induit une homogénéisation de l'écoulement : le champ de vitesse devient très reproductible à chaque période, et le champ de masse volumique devient homogène en espace, et indépendant du nombre de Mach en dessous d'un certain seuil. On peut aussi constater que l'entropie devient constante dans tout l'écoulement lorsque  $M$  est assez petit (non représenté). A faible Mach l'écoulement obtenu est donc tel que  $\rho = \rho(t)$ ,  $p = p(t)$  et  $p/\rho^\gamma = \text{cte}$  ou  $dp = c^2 d\rho$  (isentropie). On

peut alors calculer la solution limite en considérant que la masse est constante dans la cavité, soit  $\rho_e(t)(l_0 - xp(t)) = \rho_0 l_0$ , et en considérant que la vitesse devient simplement linéaire en espace. On obtient :

$$\begin{cases} \rho_e(t) = \frac{4}{3}\rho_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\cos\omega t} \\ u_e = V_p(t) \frac{l_0 - x}{l_0 - x_p} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

La figure II.3 montre les courbes temporelles de vitesse et de masse volumique à la position  $x = 1.55$  m, auxquelles on a superposé la solution exacte II.20. On constate que la solution numérique  $(\rho, u)$  tend bien vers la solution  $(\rho_e, u_e)$  quand  $M \rightarrow 0$ . De plus l'analyse des résultats numériques montre que la différence entre la solution numérique et la solution exacte est une fonction oscillatoire dont l'amplitude varie comme  $M^2$ , comme prévu par l'analyse de la section précédente. Les oscillations décroissent plus vite en amplitude relative sur le champ de masse volumique, qui est indépendant de  $M$ .



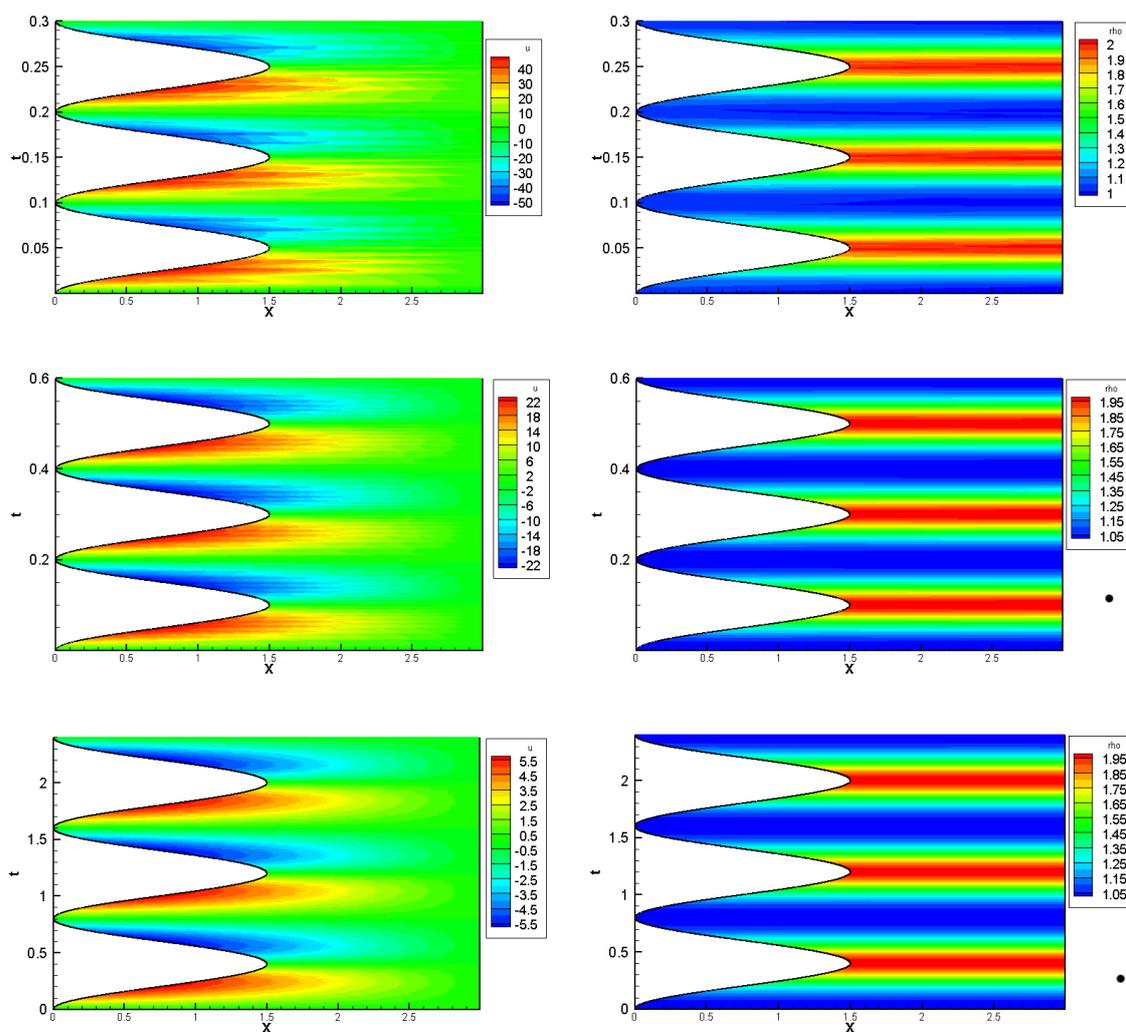
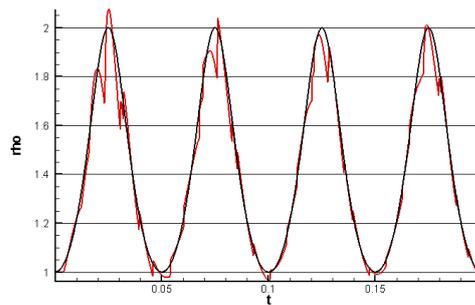
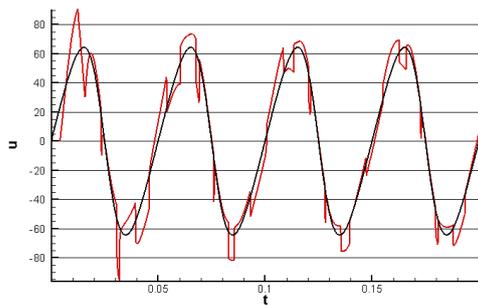
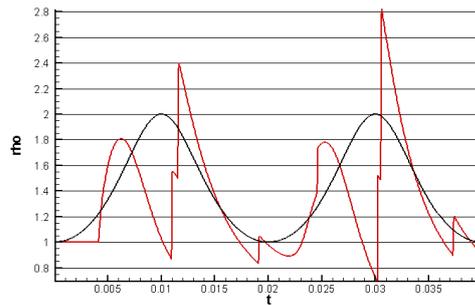
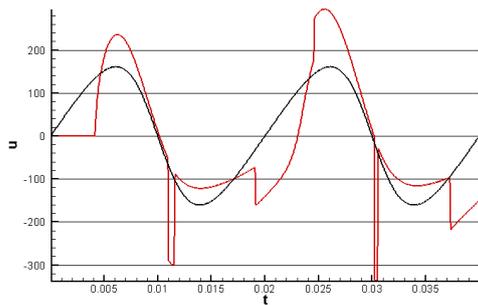
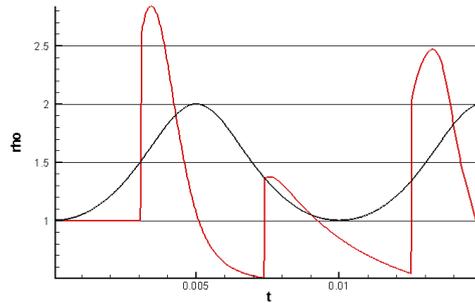
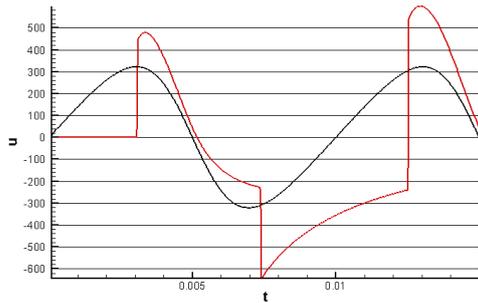


FIG. II.2 – Isovaleurs de la vitesse (à gauche) et de la masse volumique (à droite) dans le plan  $(x,t)$ . De haut en bas :  $\Upsilon=0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.8$ .



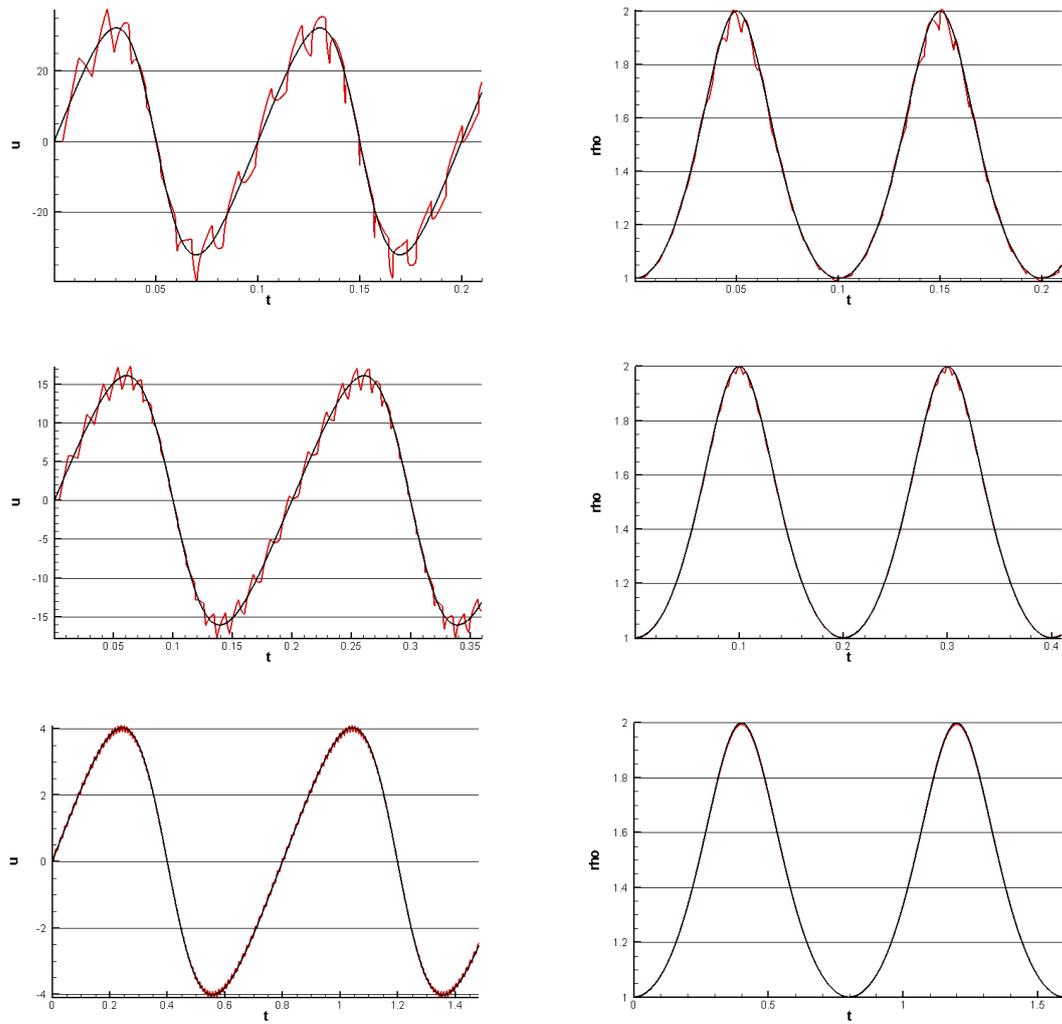


FIG. II.3 – En rouge, vitesse (à gauche) et masse volumique (à droite) en fonction du temps à la position  $x = 1.55$ . De haut en bas :  $\Upsilon = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.8$ . En noir, solution II.20

## II.3 Analyse asymptotique et modèle pour les écoulements à faible Mach.

Dans les applications où les vitesses sont petites, un modèle spécifique où l'acoustique est enlevée semble mieux adapté. Dans le traitement numérique d'un tel modèle, on évitera ainsi d'office les problèmes de stabilité numérique liés à l'acoustique, et la limitation sur le pas de temps qui en découle. Ces modèles ont initialement été proposés pour traiter des écoulements basse vitesse pouvant subir de grandes variations de la pression moyenne tels que le vidage de récipients pressurisés [17], ou les écoulements de convection naturelle provoqués par de grandes différences de température [61], [66]. On peut aussi, dans le domaine de la combustion, citer les travaux [69], [52]. Dans ces méthodes la pression est décomposée en une pression moyenne qui peut évoluer temporellement, et une composante additionnelle qui est responsable de la satisfaction de la contrainte sur la divergence.

Pour plus de développements sur les différents régimes d'écoulements faible Mach, et les approches asymptotiques associées, on pourra consulter les cours [58] et [41], dans lesquels on trouvera également une bibliographie fournie sur le sujet.

Les modèles spécifiquement adaptés aux écoulements incompressibles ou à bas Mach sont dérivés du modèle compressible II.1 à partir d'un développement asymptotique en puissances du nombre de Mach. Nous supposons ici qu'il existe une échelle d'espace et une échelle de temps uniques. Afin d'effectuer cette analyse, nous commençons par adimensionner les équations. Pour cela, introduisons les grandeurs de référence suivantes :  $x_r$ ,  $\rho_r$ ,  $p_r$ ,  $u_r$ ,  $\mu_r$ ,  $k_r$ , respectivement longueur, masse volumique, pression, vitesse, viscosité et conductivité thermique de référence. Le temps de référence, lié à la convection, est  $t_r = x_r/u_r$ , l'énergie interne et la température de référence sont données par  $e_r = p_r/\rho_r$  et  $T_r = p_r/(r\rho_r)$ . En considérant que  $p_r = \rho_r c_r^2/\gamma$ , où  $c_r$  est la vitesse du son de référence, et en définissant le nombre de Mach  $M = u_r/c_r$ , les équations deviennent sous forme adimensionnée :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) & = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\gamma M^2} \nabla p & = \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v}) & = \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\gamma M^2}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \mathbf{v}) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

avec la loi d'état  $p = (\gamma - 1)\rho e$  ou  $p = \rho T$ . L'énergie totale s'écrit  $E = e + \gamma M^2 \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$ . Toutes les variables de l'écoulement sont ensuite développées en série de puissances de  $M$ , comme par exemple la pression :

$$p(\mathbf{x}, t, M) = p_0(\mathbf{x}, t, M) + M p_1(\mathbf{x}, t, M) + M^2 p_2(\mathbf{x}, t, M) + \mathcal{O}(M^3) \quad (\text{II.22})$$

En reportant ces développements dans le système II.21, et en considérant que les équations sont vérifiées pour toute valeur de  $M$ , on obtient les équations de l'écoulement aux

différents ordres. Pour l'équation de conservation de la masse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_1) = 0 \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{v}_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Pour la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \nabla p_0 = 0 \\ \nabla p_1 = 0 \\ \frac{\partial \rho_0 \mathbf{v}_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0) + \frac{1}{\gamma} \nabla p_2 = \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}_0) \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Pour l'énergie :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0 E_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 E_0 \mathbf{v}_0 + p_0 \mathbf{v}_0) = \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_0) \\ \frac{\partial \rho_1 E_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 E_1 \mathbf{v}_1 + p_1 \mathbf{v}_1) = \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_1) \\ \frac{\partial \rho_2 E_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 E_2 \mathbf{v}_2 + p_2 \mathbf{v}_2) = \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_2) + \frac{\gamma}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}_0 \mathbf{v}_0) \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Il résulte de (II.24)<sub>1</sub> et (II.24)<sub>2</sub> que  $p_0 = p_0(t)$  et  $p_1 = p_1(t)$ . On remarque, en combinant les systèmes d'ordre 0 et 1 sous la forme (ordre 0)+M (ordre 1), qu'on ne gagne pas d'information des termes d'ordre 1 du développement, et que l'on peut aussi bien démarrer l'analyse asymptotique à partir de développements sous la forme :

$$p(\mathbf{x}, t, M) = p_0(\mathbf{x}, t, M) + M^2 p_2(\mathbf{x}, t, M) + \mathcal{O}(M^3) \quad (\text{II.26})$$

L'équation d'état à l'ordre 0 devient :  $p_0(t) = \rho_0(\mathbf{x}, t) T_0(\mathbf{x}, t)$ , ou en énergie totale  $p_0 = (\gamma - 1) \rho_0 E_0$ . En utilisant cette équation d'état, l'équation d'énergie à l'ordre 0 devient :

$$\frac{dp_0}{dt} + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = \frac{\gamma}{Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_0) \quad (\text{II.27})$$

En utilisant l'équation de continuité à l'ordre 0, on peut aussi réécrire II.27 comme une équation d'évolution pour la température :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho_0 \left( \frac{\partial T_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla T_0 \right) - \frac{dp_0}{dt} = \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_0) \quad (\text{II.28})$$

Récapitulons maintenant le système limite pour les écoulements à faible Mach obtenu à l'ordre 0. En omettant les indices, et en notant  $P_0$  la pression d'ordre 0 et  $p = p_2/\gamma$ , il s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) - \frac{dP_0}{dt} = \frac{\gamma}{(\gamma - 1) Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T) \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

complété de l'équation d'état :

$$P_0(t) = \rho(\mathbf{x},t)T(\mathbf{x},t) \quad (\text{II.30})$$

La pression  $P_0$ , qui ne dépend que du temps, peut être déterminée en intégrant l'équation d'énergie sous la forme II.27 sur le volume du domaine de calcul :

$$\frac{dP_0}{dt} \int_V dV + \gamma P_0 \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{\gamma}{RePr} \int_{\partial V} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{II.31})$$

A partir de l'équation d'énergie ou de la masse, on obtient la contrainte sur le champ de vitesse :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{RePr} \frac{1}{P_0} \nabla \cdot (k \nabla T) - \frac{1}{\gamma P_0} \frac{dP_0}{dt} \quad (\text{II.32})$$

La divergence de la vitesse est donc affectée par la conduction de chaleur et par la variation temporelle de la pression d'ordre 0  $P_0$  (compression ou détente en volume).

Le fait notable dans les équations que nous venons d'établir est l'existence de deux pressions indépendantes dans ce système, d'ordres de grandeur très différents. La pression  $P_0$ , d'ordre 0, est la pression thermodynamique, qui est reliée à la masse volumique et à la température à travers la loi d'état, mais qui n'intervient pas dans l'équation décrivant l'évolution temporelle du champ de vitesse. Elle varie avec les changements de température et de masse volumique dus à la conduction de chaleur et à la variation de volume du domaine d'écoulement, mais ne propage pas d'ondes. Les ondes acoustiques ont été éliminées du système II.30 du fait que la pression  $p$  qui intervient dans l'équation de quantité de mouvement n'est plus reliée à la masse volumique. Cette pression, qu'on appelle en général la pression dynamique, devient un paramètre permettant la satisfaction de la contrainte sur la divergence de la vitesse II.32, de même que dans le cas des écoulements purement incompressibles.

Le système II.30 contient comme cas particulier celui des écoulements incompressibles. En effet, si l'on impose  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  dans II.29, l'équation de continuité nous donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (\text{II.33})$$

soit un simple transport de la masse volumique le long des trajectoires. Si la masse volumique est uniforme à l'état initial, soit  $\rho(\mathbf{x},0) = \rho_0$ , alors  $\rho(\mathbf{x},t) = \rho_0$  et on obtient un écoulement incompressible à masse volumique constante, le problème dynamique devenant complètement découplé du problème thermique.

Le fait d'avoir éliminé les ondes acoustiques dans ce modèle change sa nature mathématique : dans le cas d'un fluide parfait, le modèle compressible forme un système hyperbolique, tandis que dans le cas incompressible ou faible Mach le système devient hyperbolique-elliptique. Il est donc naturel que les méthodes numériques adaptées à ces deux modèles subissent la même dichotomie.



# Chapitre III

## Méthodes numériques.

### III.1 Méthodes numériques pour le compressible.

Nous nous intéressons maintenant aux méthodes numériques dans le cas compressible. La difficulté centrale dans la construction de méthodes numériques pour le compressible réside dans la partie fluide parfait (équations d'Euler) du système II.1. Les termes de diffusion, effets visqueux ou conduction de chaleur, sont des termes isotropes et régularisants, qui sont généralement discrétisés par des formules centrées standard et ne posent pas de problèmes particuliers. Nous nous limiterons donc dans ce qui suit aux équations d'Euler.

Un point crucial dans la construction de méthodes numériques pour la simulation des écoulements compressibles est leur capacité à traiter les éventuelles discontinuités telles que ondes de choc ou discontinuités de contact. Le traitement des ondes de choc impose la conservativité des équations et de la méthode numérique. En effet, il est impératif de vérifier les relations de saut, ou relations de Rankine-Hugoniot, qui relient les grandeurs au travers d'un choc. Considérons un écoulement 1D de fluide parfait, gouverné par les équations d'Euler II.3. Si  $s$  est la vitesse du choc, et si nous attribuons les indices  $l$  (resp.  $r$ ) à l'état immédiatement à gauche (resp. immédiatement à droite) de la discontinuité, les relations de saut s'écrivent :

$$f(w_r) - f(w_l) = s(w_r - w_l), \quad (\text{III.1})$$

soit encore :

$$\begin{cases} \rho_r u_r - \rho_l u_l = s(\rho_r - \rho_l) \\ \rho_r u_r^2 + p_r - \rho_l u_l^2 - p_l = s(\rho_r u_r - \rho_l u_l) \\ \rho_r E_r u_r + p_r u_r - \rho_l E_l u_l - p_l u_l = s(\rho_r E_r - \rho_l E_l) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Ces relations doivent être vérifiées pour permettre le calcul correct de la vitesse d'une onde de choc, ou du saut des grandeurs à travers l'onde. Il ne s'agit pas ici de précision numérique, mais bien de l'adéquation du modèle et de la méthode numérique à l'écoulement considéré. La seule forme complètement conservative des équations de Navier-Stokes est la

forme II.1 (toutes les dérivées spatiales sont sous forme de divergence), et c'est la seule que l'on doit utiliser pour calculer un écoulement avec chocs forts. Il est également impératif que la méthode numérique soit conservative, notion que nous allons préciser.

Commençons par nous placer dans le cas 1D, et définissons une grille de discrétisation spatiale  $\{x_j\}_{j=1,\dots,J}$  que nous supposons de pas uniforme  $\delta x = x_{j+1} - x_j$ . Un pas de temps  $\delta t = t^{n+1} - t^n$  est associé à la discrétisation en temps. Nous désignons par  $W_j^n$  la solution numérique au point  $x_j$  et au temps  $t^n$ . Toutes les variables sont localisées au même endroit dans chaque cellule du maillage (approche collocative). Un schéma de discrétisation de II.3 sous forme conservative s'écrit :

$$W_j^{n+1} - W_j^n = -\frac{\delta t}{\delta x}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) \quad (\text{III.3})$$

où  $F_{j+1/2} = F(W_{j-p}^n, \dots, W_{j+q}^n)$  est le flux numérique du schéma (explicite dans ce cas). Le flux  $F_{j+1/2}$  peut aussi dépendre de valeurs de  $W$  à l'instant  $n+1$ , pour les schémas implicites. Le flux  $F_{j+1/2}$  dépend de  $p+q+1$  arguments, en fonction de la discrétisation spatiale choisie et de la précision du schéma. Le flux  $F_{j-1/2}$  s'obtient à partir de  $F_{j+1/2}$  par un simple décalage d'indice, c'est ce qui assure la conservativité du schéma III.3. Cette propriété assure que lorsqu'on fait un bilan sur plusieurs cellules consécutives du maillage, les flux intérieurs s'annulent deux à deux, propriété que possèdent les équations de Navier-Stokes. Le schéma III.3 est consistant (précision d'ordre 1) si  $F(U, \dots, U) = f(U)$ . Un théorème fondamental [44] prouve que la solution numérique obtenue par une méthode consistante et conservative converge vers une solution faible du système à résoudre, c'est à dire vers une solution vérifiant les relations de saut si elle comporte des discontinuités. L'utilisation d'un schéma sous la forme III.3 permet donc le calcul automatique des ondes de choc avec les bonnes propriétés. De plus un schéma numérique sous la forme III.3 est entièrement déterminé par son flux numérique.

Une autre des difficultés associées à la présence de discontinuités dans les écoulements compressibles est le développement dans leur voisinage d'oscillations numériques parasites, qui peuvent être de forte amplitude (phénomène de Gibbs). Sans traitement spécifique des discontinuités, toutes les méthodes précises à l'ordre 2 ou plus possèdent cette pathologie. On montre sur la figure (III.1) le résultat obtenu sur un problème de tube à choc pour la masse volumique, en utilisant un schéma d'ordre 2. On constate que de fortes oscillations apparaissent au voisinage du choc et de la discontinuité de contact, et aussi au pied de la détente où la dérivée de la fonction est discontinue. Ces oscillations sont à la fois source de "pollution" de la solution (comment distinguer une petite structure de l'écoulement d'une oscillation numérique?), mais aussi de manque de robustesse de la méthode. En effet, elles peuvent amener l'apparition de pressions ou de masses volumiques négatives, ce qui avorte le calcul. Les schémas précis à l'ordre 1 n'ont généralement pas ce comportement oscillatoire. Ils possèdent en effet une erreur dominante de type dissipative, qui empêche l'apparition des oscillations. La figure (III.2) montre le résultat du même calcul par un

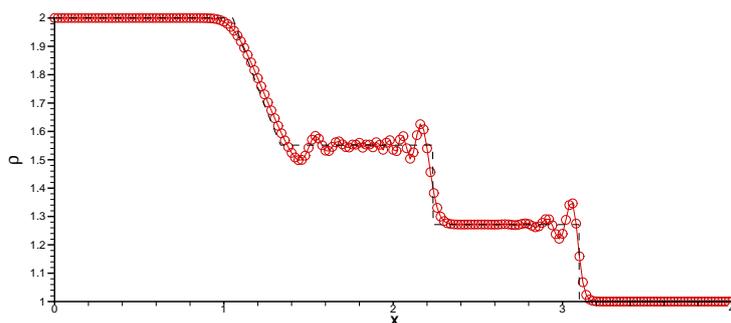
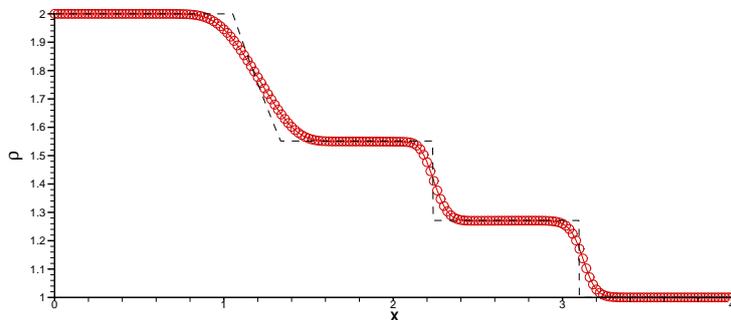
FIG. III.1 – *Solution numérique du problème du tube à choc : schéma d'ordre 2.*

schéma d'ordre 1, exempt de toute oscillation parasite mais de moindre précision. Le challenge au coeur du développement de méthodes numériques pour le compressible est ainsi le suivant : comment obtenir un schéma qui soit à la fois précis et non oscillant, capable de représenter correctement et précisément à la fois les petites structures de l'écoulement, et les discontinuités ? De tels schémas, intégrant un mécanisme spécifique pour le traitement des ondes de choc, sont communément appelés schémas à "capture de choc" (shock capturing en anglais).

FIG. III.2 – *Solution numérique du problème du tube à choc : schéma d'ordre 1.*

Les méthodes de capture de choc développées dans la littérature peuvent se classer en trois catégories. La première, la plus ancienne, remonte aux années 1950 et aux travaux de Von Neumann et Richtmyer [87]. Elle est basée sur l'ajout de viscosité dite artificielle d'ordre 2 au schéma, sous la forme d'un Laplacien à coefficients non linéaires. D'autres viscosités artificielles plus élaborées et combinant des dérivées d'ordre plus élevé ont été développées dans les années 1980 notamment par Jameson et al. [32, 33]. Cette méthode a trouvé un regain d'intérêt ces dernières années, couplée à l'utilisation de senseurs sophistiqués, à travers des travaux comme ceux de de Bogey et al. [4] dans le domaine de l'aéroacoustique. Elle a comme atouts sa grande simplicité et son coût CPU très faible.

Néanmoins il s'agit d'une méthode qui n'élimine pas totalement les oscillations parasites, et ne contrôle pas précisément la dissipation ajoutée au schéma.

La deuxième catégorie, qui date des années 1970-80, est issue des travaux de Van Leer et de Harten [82, 83, 84, 85, 86, 26, 27]. Elle comprend les schémas dits "VTD" (à Variation Totale Décroissante), construits, pour des schémas d'ordre 2, à partir de la notion de limiteur (de flux ou de pente). Le mécanisme consiste à dégrader localement le schéma à l'ordre 1, en construisant un indicateur de régularité de la solution et en pondérant un schéma d'ordre 1 et un schéma d'ordre 2 par une fonction (le limiteur) qui dépend de cet indicateur. On obtient ainsi des schémas non oscillants d'ordre 2 presque partout. L'extension à un ordre plus élevé se fait suivant le même principe. Ils présentent cependant l'inconvénient majeur de ne pas faire la distinction entre une discontinuité et un extremum local. Ainsi, le limiteur est activé aux extrema, et le schéma est d'ordre 1 à ces endroits. Ceci ne permet pas la restitution correcte des petites structures d'un écoulement, qui sont très rapidement dissipées. Cependant, des travaux plus récents ont permis de lever ce problème (schémas MP [78], [10]), et on peut obtenir des résultats d'excellente qualité par ce type d'approche.

Enfin une troisième catégorie de méthodes, initialement introduite par Harten et ses co-auteurs en 1987 [28], et développée dans [1], [34], [49], [73],[74],[75],[76], utilise le principe d'un stencil variable pour construire le flux numérique du schéma. Sur chaque face de cellule, le stencil est choisi, parmi l'ensemble des stencils possible pour un ordre de précision donné, de manière à minimiser un indicateur de régularité. On obtient de la sorte un flux numérique dit Essentiellement Non Oscillant (ENO). Les schémas WENO utilisent une combinaison de tous les stencils possibles pour obtenir un schéma d'ordre plus élevé dans les zones régulières. Contrairement à la notion de schéma VTD, le concept ENO/WENO n'interdit pas à la solution numérique d'être oscillante, mais autorise seulement des oscillations décroissant en  $\mathcal{O}(\delta x^k)$ ,  $k$  étant l'ordre de précision du schéma. Cette approche permet effectivement d'obtenir des schémas d'ordre très élevé, au moins spatialement (l'ordre temporel est généralement limité à 3), pas ou très peu oscillants. Néanmoins ils sont coûteux en temps CPU.

Nous nous limiterons ici à présenter brièvement la construction d'un schéma TVD d'ordre 2. Pour cela nous commençons par introduire deux schémas de base pour la résolution des équations d'Euler 1D : le schéma de Roe [68], qui est un schéma décentré d'ordre 1, et le schéma de Lax-Wendroff, qui est un schéma centré d'ordre 2.

#### • Schéma de Roe.

La notion de décentrement est liée à celle de sens de propagation de l'information. Pour construire un schéma décentré, il faut donc le faire relativement à l'orientation, positive ou négative, de chacune des courbes caractéristiques (dans le cas Euler 1D on aura 3 caractéristiques de pentes  $u, u+c$  et  $u-c$ ), ce qui suppose a-priori une construction à partir du système sous forme non conservative. Construire un schéma décentré et conservatif est

donc une gageure. Parmi les schémas répondant à ces critères, les schémas de Godunov [22] (1959) et de Roe [68] (1981), sont au coeur des méthodes modernes pour le compressible. Nous nous bornerons ici à présenter le schéma de Roe. Pour construire le schéma de Roe, nous partons de la forme non conservative II.4, et décomposons la matrice  $A$  en partie positive et négative :  $A(w) = A^+(w) + A^-(w)$ . Ceci est possible en vertu de l'hyperbolicité du système, qui permet de diagonaliser  $A$ . On définit ainsi  $|A| = R|\Lambda|R^{-1}$ ,  $|\Lambda|$  étant la matrice diagonale des valeurs absolues des valeurs propres de  $A$ , puis  $A^\pm = \frac{1}{2}(A \pm |A|)$ . La matrice  $A^+$  (resp.  $A^-$ ) n'a que des valeurs propres positives ou nulles (resp. négatives). Le système devient :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A^+(w) \frac{\partial w}{\partial x} + A^-(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Le principe du schéma consiste à utiliser des formules de discrétisation décentrées d'ordre 1 pour la dérivée spatiale, à gauche pour la partie positive, à droite pour la partie négative, cela pour des raisons de stabilité. Il faut aussi choisir l'expression discrète de  $A^\pm(w)$ . Ce choix est fait de manière à obtenir finalement un schéma sous forme conservative, utilisable pour calculer des chocs. Pour cela, on impose à la matrice discrète, notée  $\tilde{A}$ , de vérifier l'égalité discrète suivante :

$$\tilde{A}(W_{j+1}^n - W_j^n) = f(W_{j+1}^n) - f(W_j^n) \quad (\text{III.5})$$

$\tilde{A}$  est choisie comme dépendant de  $W_j^n$  et  $W_{j+1}^n$ , de sorte que le schéma s'écrit :

$$W_j^{n+1} - W_j^n = -\frac{\delta t}{\delta x} \left( \tilde{A}_{j+1/2}^-(W_{j+1}^n - W_j^n) + \tilde{A}_{j-1/2}^+(W_j^n - W_{j-1}^n) \right) \quad (\text{III.6})$$

en notant  $\tilde{A}_{j+1/2}^\pm = \tilde{A}(W_j^n, W_{j+1}^n)$ . Si l'on remplace les matrices  $\tilde{A}_{j-1/2}^+$  et  $\tilde{A}_{j+1/2}^-$  par leur expression  $\tilde{A}^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{j-1/2} \pm |\tilde{A}_{j-1/2}|)$ , on obtient un schéma conservatif sous la forme III.3, avec le flux numérique :

$$F_{j+1/2}^{Roe} = \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{1}{2}|\tilde{A}_{j+1/2}|(W_{j+1}^n - W_j^n) \quad (\text{III.7})$$

Le premier terme du membre de droite de III.7 correspond à un schéma purement centré d'ordre 2, le deuxième terme est la partie dissipative du schéma. La matrice  $\tilde{A}$  est construite algébriquement en remarquant que  $w$  et  $f(w)$  sont des fonctions quadratiques du même vecteur. Le calcul complet aboutit à un résultat très remarquable : la matrice  $\tilde{A}_{j+1/2} = \tilde{A}(W_j, W_{j+1})$  est identique au Jacobien local (II.5) exprimé à partir des variables  $u$  et  $H$  si celles ci sont remplacées par une moyenne pondérée par la racine carrée du produit des masses volumiques, soit :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j+1/2} &= \sqrt{\rho_j \rho_{j+1}} \\ \tilde{u}_{j+1/2} &= \frac{u_{j+1} \sqrt{\rho_{j+1}} + u_j \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_{j+1/2} = \frac{H_{j+1}\sqrt{\rho_{j+1}} + H_j\sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}}$$

La vitesse du son est donnée par  $\tilde{c}^2 = (\gamma - 1)(\tilde{H} - \tilde{u}^2/2)$ , et les valeurs propres sont  $\tilde{\lambda}^1 = \tilde{u} - \tilde{c}$ ,  $\tilde{\lambda}^2 = \tilde{u}$  et  $\tilde{\lambda}^3 = \tilde{u} + \tilde{c}$ .

Ce schéma est stable sous la condition CFL  $\frac{\delta t}{\delta x} \max_j |\tilde{\lambda}^l| \leq 1$ ,  $l = 1, 2, 3$ , soit  $\frac{\delta t}{\delta x} (|\tilde{u}| + \tilde{c}) \leq 1$ . Le pas de temps est donc limité par l'inverse de la vitesse du son, condition qui devient très restrictive lorsque le nombre de Mach tend vers 0. C'est la raison principale qui justifie l'utilisation de modèles mieux adaptés dans le cas d'écoulements à très faible nombre de Mach.

• **Schéma de Lax-Wendroff.**

Le schéma de Lax-Wendroff est un schéma à trois points centré, précis à l'ordre 2 en temps et en espace, qui s'obtient en utilisant le système (II.3) pour remplacer les dérivées en temps par des dérivées en espace dans un développement de Taylor en temps tronqué à l'ordre 2 de  $w(x_j, t^n + \delta t)$  :

$$w(x_j, t^n + \delta t) = w(x_j, t^n) + \delta t w_t(x_j, t^n) + \frac{\delta t^2}{2} w_{tt}(x_j, t^n) \quad (\text{III.8})$$

On écrit ensuite :

$$w_t = -f_x \quad (\text{III.9})$$

$$w_{tt} = -(f_x)_t = -(f_t)_x = -(A(w)w_t)_x = (A(w)f_x)_x \quad (\text{III.10})$$

que l'on remplace dans (III.8). Après discrétisation par des formules centrées d'ordre 2 des dérivées d'espace, le schéma s'écrit :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{2\delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{\delta t^2}{2\delta x^2} (A_{j+1/2}^n (f_{j+1}^n - f_j^n) - A_{j-1/2}^n (f_j^n - f_{j-1}^n)) \quad (\text{III.11})$$

La matrice  $A_{j+1/2}$  peut être choisie par exemple comme la moyenne de Roe  $\tilde{A}_{j+1/2}$ . Le flux numérique du schéma est donné par :

$$F_{j+1/2}^{lw} = \frac{1}{2} (f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{\delta t}{2\delta x} \tilde{A}_{j+1/2} (f_{j+1}^n - f_j^n) \quad (\text{III.12})$$

Ce schéma est à 3 points et centré, et bien entendu, par construction, précis à l'ordre 2 en temps et en espace. Il en existe de multiples variantes à deux pas (prédicteur correcteur) : schéma de Richtmyer, de MacCormack...

Ce schéma est stable sous la même condition CFL que le schéma de Roe.

• **Construction d'un schéma TVD.**

La notion de schéma TVD a été introduite par Harten dans les années 80. Il s'agissait de développer des schémas précis (au moins à l'ordre 2), et non oscillants pour le calcul des discontinuités. L'acronyme TVD correspond à "Total Variation Diminishing". Le principe de base consiste à reproduire, dans la solution numérique, la propriété qu'a la solution

exacte d'une équation hyperbolique **scalaire** d'être à variation totale décroissante, la variation totale d'une fonction  $g$  étant définie comme :

$$TV(g) = \sup \sum_{j=1}^N |g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})| \quad (\text{III.13})$$

où le sup est pris sur l'ensemble des subdivisions de la droite  $-\infty < \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = \infty$ . Dans le cas **scalaire linéaire**, l'équation II.3 s'écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.14})$$

avec  $a \in \mathbb{R}$ , et sa solution exacte  $w(x,t)$  possède la propriété que sa variation totale est décroissante au cours du temps, c'est à dire qu'on a à tout instant  $t$  :

$$TV(w(.,t + \delta t)) \leq TV(w(.,t)) \quad (\text{III.15})$$

Cette propriété interdit l'apparition de nouveaux extrema locaux dans la solution. Si l'on définit la variation totale de la solution numérique par :

$$TV(W_j^n) = \sum_j |W_{j+1}^n - W_j^n| \quad (\text{III.16})$$

alors un schéma numérique est dit TVD s'il vérifie la propriété :

$$TV(W_j^{n+1}) \leq TV(W_j^n) \quad (\text{III.17})$$

Au niveau discret, un schéma TVD ne peut donc pas créer d'oscillations numériques. Harten a alors établi des conditions sur les coefficients d'un schéma pour qu'il soit TVD. En écrivant le schéma sous forme incrémentale, c'est à dire sous la forme :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - C_{j-1}(W_j^n - W_{j-1}^n) + D_j(W_{j+1}^n - W_j^n), \quad (\text{III.18})$$

il a démontré :

THÉORÈME (HARTEN) : Pour que le schéma (III.18) soit TVD, les conditions suivantes sont suffisantes :

$$\begin{aligned} C_j &\geq 0 & \forall j \\ D_j &\geq 0 & \forall j \\ C_j + D_j &\leq 1 & \forall j \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Si nous reprenons nos deux schémas de Roe et de Lax-Wendroff dans le cas scalaire linéaire, leur flux numérique s'écrit :

$$F_{j+1/2}^{Roe} = \frac{1}{2}a(W_j^n + W_{j+1}^n) - \frac{1}{2}|a|(W_{j+1}^n - W_j^n) \quad (\text{III.20})$$

$$F_{j+1/2}^{lw} = \frac{1}{2}a(W_j^n + W_{j+1}^n) - \frac{\delta t}{2\delta x}a^2(W_{j+1}^n - W_j^n) \quad (\text{III.21})$$

Le schéma de Roe s'écrit aussi sous forme incrémentale :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{\delta x} a^- (W_{j+1}^n - W_j^n) - \frac{\delta t}{\delta x} a^+ (W_j^n - W_{j-1}^n) \quad (\text{III.22})$$

et il est immédiat que ses coefficients  $C_j = \frac{\delta t}{\delta x} a^+$  et  $D_j = -\frac{\delta t}{\delta x} a^-$  vérifient les conditions de théorème de Harten, sous condition de stabilité CFL  $\frac{\delta t}{\delta x} |a| \leq 1$ . Le schéma de Lax-Wendroff en revanche n'est pas TVD.

Le principe de construction d'un schéma TVD précis à l'ordre 2 est alors le suivant : en considérant qu'un schéma d'ordre 1 est monotone pour le calcul des discontinuités, on cherche à construire un schéma d'ordre 2 que l'on dégradera *localement* à l'ordre 1 de manière à interdire l'apparition d'oscillations. De façon équivalente, on peut partir d'un schéma d'ordre 1, auquel on ajoute une correction pour obtenir un schéma d'ordre 2, et on *limite* cette correction lorsqu'on est en présence de discontinuités. Si l'on considère les schémas de Roe et de Lax-Wendroff, on construit le flux du schéma TVD associé comme :

$$F_{j+1/2}^{TVD} = F_{j+1/2}^{Roe} + \phi_j (F_{j+1/2}^{lw} - F_{j+1/2}^{Roe}) \quad (\text{III.23})$$

La fonction  $\phi$  est appelée le **limiteur**, elle doit être égale à 1 dans les zones régulières (de manière à retrouver le schéma d'ordre 2), tandis qu'elle vaudra 0 dans les zones où il y a des risques de création d'oscillations numériques. On choisit  $\phi_j$  comme une fonction à un paramètre  $r_j$ ,  $\phi_j = \phi(r_j)$ ,  $r_j$  étant défini dans le cas  $a > 0$  comme le rapport des gradients consécutifs suivant :

$$r_j = \frac{W_j - W_{j-1}}{W_{j+1} - W_j} \quad (\text{III.24})$$

et dans le cas  $a < 0$  :

$$r_j = \frac{W_{j+2} - W_{j+1}}{W_{j+1} - W_j} \quad (\text{III.25})$$

Le paramètre  $r_j$  est un indicateur de régularité locale de la solution. En effet, si la solution est localement régulière et en dehors des extrema, on a :

$$r_j = \frac{W_j - W_{j-1}}{W_{j+1} - W_j} = \frac{w_x - \frac{\delta x}{2} w_{xx} + \mathcal{O}(\delta x^2)}{w_x + \frac{\delta x}{2} w_{xx} + \mathcal{O}(\delta x^2)} \Big|_j = 1 - \delta x \frac{w_{xx}}{w_x} \Big|_j + \mathcal{O}(\delta x^2) \quad (\text{III.26})$$

Un schéma TVD est ainsi construit comme une pondération non linéaire entre un schéma d'ordre 1 et un schéma d'ordre 2. On appellera une méthode de ce type une méthode de limiteur de flux. Le théorème suivant statue sur la précision de la méthode :

**THÉORÈME :** La méthode de limiteur de flux (III.23) est consistante avec l'équation d'advection (III.1) si  $\phi$  est une fonction bornée. Elle est précise à l'ordre 2 sur les solutions régulières et en dehors des extrema si  $\phi(1) = 1$  et  $\phi$  admet une dérivée à droite et à gauche en  $r = 1$ .

En appliquant les conditions de Harten au schéma ainsi défini, et en imposant de façon générale  $\phi_j = \phi(r_j) = 0$  si  $r_j \leq 0$  (cas correspondant à un extremum puisque le gradient

de  $W$  change de signe), on peut établir les conditions qui doivent être vérifiées par le limiteur :

$$\begin{cases} 0 \leq \phi(r) \leq \frac{2}{1 - |\nu|} \\ 0 \leq \phi(r) \leq \frac{2r}{|\nu|} \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

avec  $\nu = |a| \frac{\delta t}{\delta x}$ . Parmi les très nombreux limiteurs qui ont été développés dans la littérature, les 3 plus classiques sont les limiteurs Minmod, SuperBee, et de VanLeer. Il s'écrivent :

- **Minmod** : c'est la borne inférieure du domaine TVD, il est défini par :

$$\phi_{mm}(r) = \text{minmod}(1, r) = \max(0, \min(r, 1))$$

la fonction minmod étant définie de manière générale par

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \cdot b \leq 0 \\ a & \text{si } |a| < |b| \text{ et } a \cdot b > 0 \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ et } a \cdot b > 0 \end{cases}$$

- **SuperBee** : c'est la borne supérieure du domaine, il est défini par :

$$\phi_{sb}(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$$

- **Van Leer** : il est dérivable en  $r = 1$ , et défini par :

$$\phi_{vl}(r) = \frac{|r| + r}{1 + r}$$

Ils sont représentés sur la figure (III.3). Les schémas TVD ainsi obtenus sont stables sous la même condition CFL que les schémas de Roe et de Lax-Wendroff. On illustre sur la figure III.4 le comportement des schémas upwind (Roe), Lax-Wendroff, et TVD équipé de ces limiteurs, sur un cas d'advection scalaire d'une donnée initiale composée d'un arc d'ellipse. On constate que le schéma de Roe est très diffusif, le schéma de Lax-Wendroff très oscillant, et que les schémas TVD sont plus précis que le schéma d'ordre 1 et non oscillants. Les limiteurs ont un comportement différent : le plus diffusif est Minmod, SuperBee a tendance à être très compressif, et VanLeer a un comportement intermédiaire. Le choix d'un limiteur dépend du cas d'application traité. On peut par exemple mettre à profit les propriétés compressives du limiteur SuperBee pour traiter l'advection de discontinuités.

Cette méthode de construction de schémas TVD peut être généralisée à des schémas d'ordre plus élevés [10]. On peut aussi appliquer le principe de la limitation à une approche dite de "reconstruction", où cette fois la solution numérique est reconstruite localement et on limite l'ordre des polynômes de reconstruction de manière à ne pas créer de nouveaux extrema. Enfin, dans l'approche qui vient d'être présentée, le temps et l'espace sont considérés simultanément, de manière couplée. D'autres approches considèrent le temps et l'espace séparément (method of lines). Dans ce cas la propriété TVD doit être vérifiée

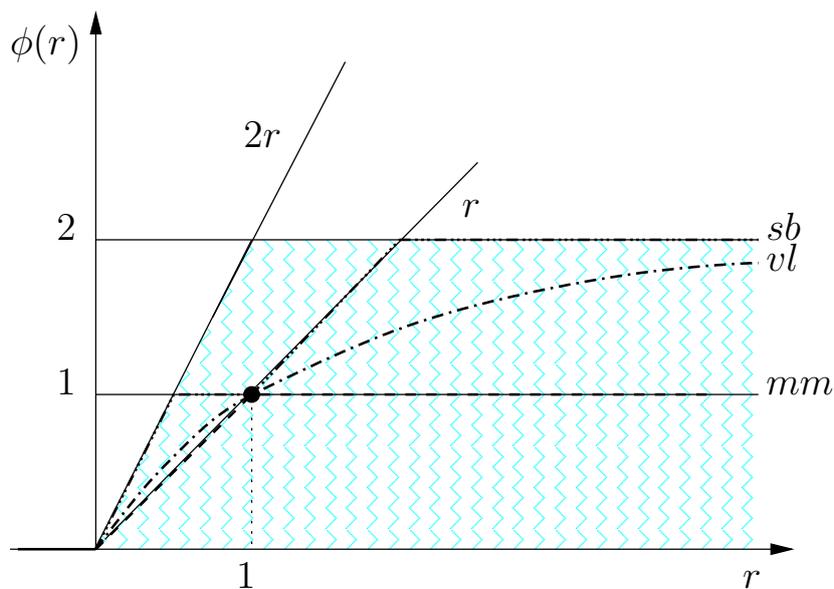
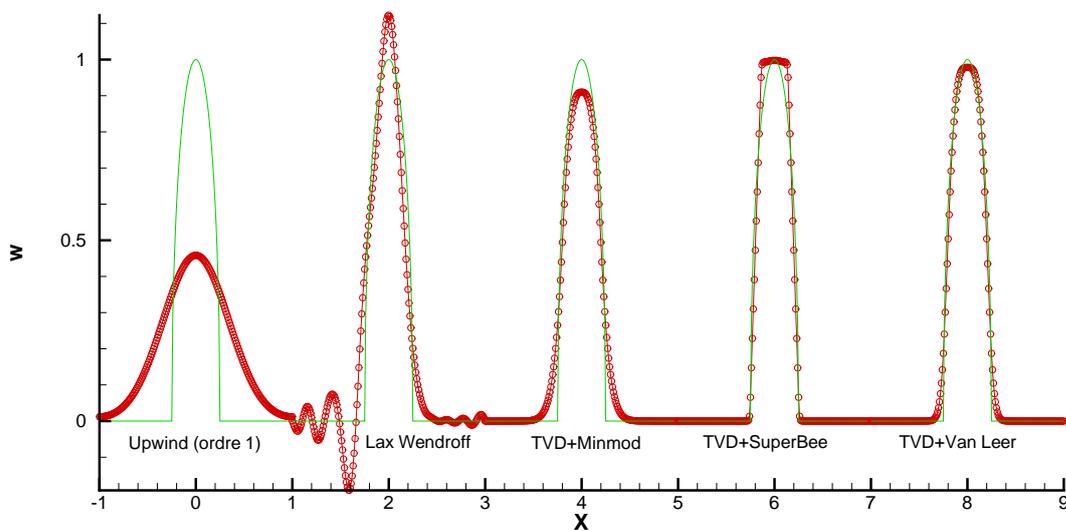
FIG. III.3 – *Limiteurs Minmod, SuperBee et VanLeer.*

FIG. III.4 – *Solution numérique obtenue par différents limiteurs pour l'advection scalaire, pour une donnée initiale de type arc d'ellipse. C.L. périodiques, 5 tours, maillage 200 points, CFL = 0.5. En vert la solution exacte.*

par la reconstruction spatiale, et également par le schéma de discrétisation temporelle, qui peut être par exemple un schéma Runge-Kutta. Un schéma Runge-Kutta TVD d'ordre 3

a été construit par [73], [74], qui ont également démontré qu'à partir de l'ordre 4 on ne peut pas obtenir de schéma TVD à partir d'un opérateur spatial unique, ce qui augmente beaucoup leur coût. Dans la pratique, les méthodes numériques TVD découplées sont limitées à l'ordre 3 en temps.

L'extension au cas des systèmes non linéaires bute sur un problème conceptuel : il n'y a pas de définition convenable de la notion de variation totale pour les systèmes, c'est une notion purement scalaire. La solution exacte d'un système non linéaire n'est en général pas TVD (exemple du tube à choc). Malgré cela, les schémas TVD développés dans le cas scalaire sont étendus heuristiquement sur les champs caractéristiques, à partir de la diagonalisation *locale* du système dans la base des vecteurs propres de la matrice jacobienne. On peut ainsi caractériser la propriété TVD de manière satisfaisante sur les variables caractéristiques, et cette méthode donne en général de bons résultats.

Vue ainsi, l'extension aux équations d'Euler ne pose alors pas de problème particulier, une fois que l'on sait définir correctement un schéma d'ordre 1 décentré. Seul point marquant par rapport au cas scalaire, le processus de limitation doit s'appliquer composante par composante dans la base des vecteurs propres relative à l'interface considérée. Le flux d'un schéma TVD s'écrit, comme dans le cas scalaire :

$$F_{j+1/2}^{TVD} = F_{j+1/2}^{Roe} + \Phi_j(F_{j+1/2}^{lw} - F_{j+1/2}^{Roe}) \quad (\text{III.28})$$

mais cette fois les flux sont des vecteurs, et  $\Phi$  est une matrice, que l'on suppose diagonalisable dans la même base que  $A$ . Le deuxième terme du membre de droite de III.28, égal à  $\frac{1}{2}|\tilde{A}_{j+1/2}|(I - \frac{\delta t}{\delta x}|\tilde{A}_{j+1/2}|)(W_{j+1}^n - W_j^n)$ , peut ainsi être limité de façon scalaire, sur chaque champ caractéristique, dans la base des vecteurs propres de  $\tilde{A}_{j+1/2}$ .

L'extension multidimensionnelle de ces schémas se fait direction par direction, ou en utilisant un splitting directionnel de Strang [77]. En ce qui concerne la propriété TVD, dans le cas multidimensionnel il existe un résultat assez négatif établi dans [23], qui démontre qu'un schéma TVD est au plus d'ordre 1. Néanmoins, l'extension direction par direction donne généralement de bons résultats.

Les schémas TVD ainsi construits éliminent efficacement les oscillations numériques parasites au voisinage des discontinuités, tout en gardant la précision du schéma d'ordre élevé dans les zones régulières. Leur inconvénient majeur est leur comportement très dissipatif au voisinage des extrema. On peut cependant éliminer ce problème en affinant le paramètre de détection de la régularité locale de la solution  $r_j$ , par la prise en compte de la courbure locale. On obtient des schémas dit MP (pour "Monotonicity Preserving") [78], [10]. Pour illustrer la bonne qualité des méthodes numériques ainsi obtenues, on montre sur la figure III.5 la solution numérique d'un problème 2D d'écoulement d'air supersonique au dessus d'une cavité [11]. L'écoulement est à Mach 1,5 et laminaire. Une couche limite se développe le long de la paroi amont, puis cette couche limite se transforme en couche de mélange au dessus de la cavité, où elle est déstabilisée et produit des lâchers

de tourbillons dans la cavité. Des ondes de choc obliques apparaissent dans l'écoulement principal. Cet écoulement comporte à la fois des ondes de chocs et des petites structures tourbillonnaires, ce qui nécessite une méthode numérique à la fois précise et robuste pour leur traitement simultané. Ce calcul a été effectué en utilisant un schéma MP d'ordre 7.

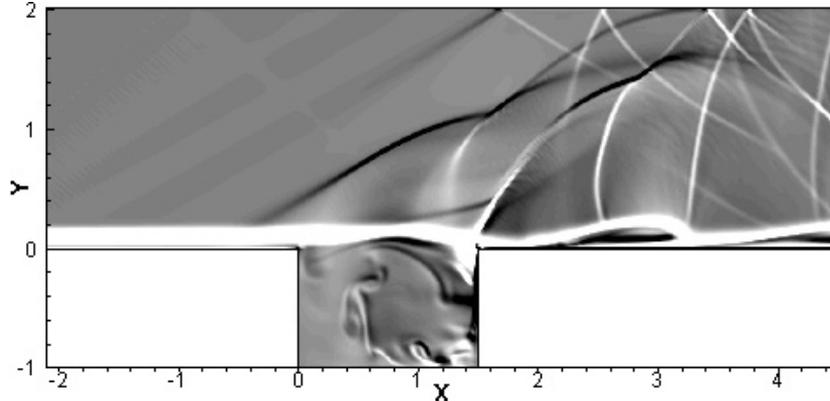


FIG. III.5 – *Écoulement supersonique au-dessus d'une cavité. Isocontours de  $\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y}$ . Tiré de [11].*

## III.2 Méthodes numériques pour les écoulements contraints.

Dans cette section nous commencerons par aborder les écoulements purement incompressibles, caractérisés par la contrainte  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , et identifierons les points clés et les difficultés qui caractérisent les méthodes numériques dans ce cas. On ne s'intéressera ici qu'à des méthodes d'ordre 2 (voir par exemple [57], [36], [38], [25], [60], sur des méthodes d'ordre plus élevé). Nous aborderons ensuite les écoulements à faible Mach, modélisés par le système d'équations que nous avons établi en section II.3. Ce système est de même nature que celui pour l'incompressible, et on retrouve donc les composantes principales d'un code incompressible dans un code faible Mach. Les éléments nouveaux portent sur le calcul de la pression thermodynamique, et sur le couplage avec l'équation de température.

### III.2.1 Écoulements incompressibles.

Lorsque la viscosité du fluide est constante, un écoulement incompressible est caractérisé par la séparation des problèmes dynamique et thermique. La température devient un scalaire passif, dont l'évolution est gouvernée par le transport convectif et la conduction de chaleur, mais elle n'influe pas sur le champ de vitesse. Le problème dynamique

(dimensionné) s'écrit pour un fluide Newtonien, en formulation conservative :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} & = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p & = \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

où la masse volumique  $\rho_0$  est constante. Ce système doit être complété par des conditions initiales et aux limites. Dans ce système, le champ de pression n'est plus comme en compressible gouverné par une équation hyperbolique, mais sa nature mathématique est celle d'un champ de multiplicateurs de Lagrange dont le rôle est de permettre la satisfaction de la contrainte III.29<sub>1</sub>. La pression est ici, comme nous le verrons, solution d'un problème elliptique. Il est donc inévitable en incompressible d'être confronté à l'inversion de grands systèmes linéaires.

Le problème d'algèbre linéaire auquel on est confronté si l'on discrétise les équations III.29 3D simultanément est si gigantesque que, inévitablement, on arrive à la conclusion qu'une procédure de découplage vitesse-pression doit être mise en oeuvre [15]. Les méthodes de projection (ou de pas fractionnaires) ont été développées pour permettre de découpler le calcul des champs de vitesse et de pression. Elles ont été introduites à la fin des années 1960 par Chorin [9] et Temam [79], puis reformulées par Kim et Moin en 1985 [37]. On pourra trouver une revue de ces méthodes dans [24] par exemple. La plupart des algorithmes calculent d'abord une valeur prévisionnelle (ou intermédiaire) de la vitesse, qui n'est pas à divergence nulle. Ce champ de vitesse prévisionnel est ensuite projeté sur le sous-espace des vecteurs à divergence nulle, à travers la résolution d'une équation elliptique (de Poisson) pour la pression.

Avant d'aborder la discrétisation temporelle des équations et le problème du couplage vitesse-pression, nous commençons par nous intéresser à la discrétisation spatiale du système III.29. A la différence du cas compressible, où toutes les équations sont de même nature et où on choisit généralement de travailler en maillage collocatif (toutes les variables sont localisées au centre des cellules), en incompressible beaucoup de codes s'appuient sur une discrétisation en maillage décalé ("staggered grid"). La raison principale en est l'existence possible de modes parasites "en damier" entre la vitesse et la pression dans le cas collocatif lorsqu'une discrétisation spatiale centrée d'ordre 2 est utilisée pour la vitesse et la pression. En effet la vitesse et la pression ne sont plus couplées dans l'équation de continuité, et la discrétisation d'une dérivée première par une formule centrée ne fait pas intervenir le point central du stencil. Une correction a été proposée par Rhie and Chow en 1984 [70] ("pressure-weighted interpolation method"), qui consiste à restaurer ce couplage en perturbant l'équation de continuité par un terme de pression à l'ordre 3, qui ne change donc pas l'ordre de précision du schéma global. D'autres approches sont possibles pour éviter le problème des modes parasites en maillage collocatif. Néanmoins le maillage décalé apparaît comme très naturel dans le contexte incompressible et c'est celui que nous présenterons ici. Insistons cependant sur le fait que le choix d'un maillage

collocatif ou décalé n'est pas intrinsèquement lié au régime d'écoulement.

En maillage décalé, les grandeurs scalaires telles que la pression sont localisées au centre des cellules, et les composantes de vitesse sur les faces. Plaçons nous pour simplifier dans le cas 2D, avec un maillage uniforme par direction, de pas  $\delta x$  et  $\delta y$ . Nous notons  $p_{i,j}$  la pression discrète au centre de la cellule  $(i,j)$ ,  $u_{i+1/2,j}$  et  $v_{i,j+1/2}$  les 2 composantes de vitesses sur les faces  $(i + \frac{1}{2}, j)$  et  $(i, j + \frac{1}{2})$ . Avec ce choix, les équations de quantité de mouvement dans III.29 seront discrétisées sur les faces des cellules, tandis que l'équation de continuité le sera aux centres. En faisant le choix d'une discrétisation spatiale centrée d'ordre 2, l'équation de continuité discrète s'écrit :

$$\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{\delta y} = 0 \quad (\text{III.30})$$

Le gradient de pression peut être discrétisé à l'ordre 2 sur les faces par les formules aux différences :

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{i+1/2,j}^x p = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta x} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} + \mathcal{O}(\delta x^2) \\ \mathbf{G}_{i,j+1/2}^y p = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\delta y} = \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j+1/2} + \mathcal{O}(\delta y^2) \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

De même les termes convectifs sont discrétisés comme :

$$\begin{cases} \mathbf{AD}_{i+1/2,j}^u = \frac{u_{i+3/2,j}^2 - u_{i-1/2,j}^2}{2\delta x} + \frac{(uv)_{i+1/2,j+1} - (uv)_{i+1/2,j-1}}{2\delta y} \\ = \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right)_{i+1/2,j} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2) \\ \text{avec} \\ v_{i+1/2,j} = \frac{1}{4}(v_{i,j+1/2} + v_{i+1,j+1/2} + v_{i,j-1/2} + v_{i+1,j-1/2}) \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

$$\begin{cases} \mathbf{AD}_{i,j+1/2}^v = \frac{(uv)_{i+1,j+1/2} - (uv)_{i-1,j+1/2}}{2\delta x} + \frac{v_{i,j+3/2}^2 - v_{i,j-1/2}^2}{2\delta y} \\ = \left( \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2) \\ \text{avec} \\ u_{i,j+1/2} = \frac{1}{4}(u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j+1} + u_{i-1/2,j} + u_{i-1/2,j+1}) \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

Enfin, les opérateurs laplacien des termes visqueux sont discrétisés comme :

$$\begin{cases} \mathbf{VS}_{i+1/2,j}^u = \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{\delta x^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{\delta y^2} \\ = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i+1/2,j} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2) \\ \mathbf{VS}_{i,j+1/2}^v = \frac{v_{i,j+3/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}}{\delta x^2} + \frac{v_{i+1,j+1/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i-1,j+1/2}}{\delta y^2} \\ = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_{i,j+1/2} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

Le système semi-discret s'écrit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{\delta y} = 0 \\ \frac{du}{dt}|_{i+1/2,j} + \mathbf{AD}_{i+1/2,j}^u + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{G}_{i+1/2,j}^x \mathbf{p} = \nu \mathbf{VS}_{i+1/2,j}^u \\ \frac{dv}{dt}|_{i,j+1/2} + \mathbf{AD}_{i,j+1/2}^v + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{G}_{i,j+1/2}^y \mathbf{p} = \nu \mathbf{VS}_{i,j+1/2}^v \end{array} \right. \quad (\text{III.35})$$

avec  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ . En rassemblant toutes les composantes discrètes de vitesse dans un vecteur  $\mathbf{u}$  et les inconnues de pression dans un vecteur  $\mathbf{p}$ , les équations III.35 se ramènent à un système différentiel algébrique de la forme suivante :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + N(\mathbf{u}) + \frac{1}{\rho_0} G\mathbf{p} = 0, \quad D\mathbf{u} = 0 \quad (\text{III.36})$$

où  $N$  est un opérateur algébrique non linéaire représentant la discrétisation des termes convectifs et visqueux ( $N(\mathbf{u}) = AD(\mathbf{u}) - \nu VS \cdot \mathbf{u}$ ),  $G$  est un opérateur linéaire algébrique représentant le gradient de pression discrétisé, et  $D$  est un opérateur linéaire algébrique représentant la discrétisation de la divergence. Ce système doit être complété par des conditions aux limites.

### Discrétisation temporelle.

Le système III.36 doit ensuite être discrétisé en temps afin d'obtenir un système complètement discret. Le schéma temporel le plus simple est le schéma d'Euler retardé, explicite et d'ordre 1. Pour l'équation de quantité de mouvement, ce schéma s'écrit :

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = -\delta t \left( N(\mathbf{u}^n) + \frac{1}{\rho_0} G\mathbf{p}^n \right) \quad (\text{III.37})$$

Etant explicite, ce schéma est soumis à une condition de stabilité. Si l'on analyse séparément les effets de convection et de diffusion (effets visqueux), une analyse de Fourier menée sur une équation scalaire linéaire 1D permet d'établir la condition de stabilité propre à chacun. Pour la convection, on obtient une condition de type CFL :  $\delta t \leq \delta t_c = \delta x / \max_j |u_j|$ , et pour la diffusion :  $\delta t \leq \delta t_d = \frac{1}{2} \delta x^2 / (\mu / \rho_0)$ . La condition de stabilité globale du schéma Euler explicite s'écrit alors :  $\delta t \leq \min(\delta t_c, \delta t_d)$ . Ou encore, en introduisant le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho_0 \max_j |u_j| L}{\mu}$ , basé sur la vitesse maximale dans l'écoulement et la longueur  $L$  du domaine de calcul :

$$\delta t \leq \delta t_c \min\left(1, \frac{1}{2} \frac{\delta x}{L} Re\right) \quad (\text{III.38})$$

En fonction du maillage d'espace et du nombre de Reynolds, le produit  $\frac{\delta x}{L} Re$  peut être beaucoup plus petit que 1 (par exemple faible  $Re$  et discrétisation fine) ou plus grand que 1 (très grand  $Re$ ). Il est donc intéressant dans le premier cas d'utiliser un schéma implicite pour la diffusion afin de permettre l'utilisation d'un pas de temps de type convectif, beaucoup moins restrictif.

Dans tous les cas, un schéma d'ordre 2 est évidemment préférable pour la précision. On donne ici deux schémas d'ordre 2, l'un explicite (Adams-Bashforth, AB2), l'autre implicite (BDF, "Backward Differentiation Scheme", aussi appelé Gear d'ordre 2). Ces schémas sont *multipas* (multistep) au sens où ils font intervenir plusieurs niveaux temporels. Ils ne sont donc pas "self-starting", et le premier pas de temps doit être effectué avec une méthode à un pas, par exemple le schéma Euler retardé.

**Schéma AB2 :**

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = -\frac{1}{2}\delta t \left( 3N(\mathbf{u}^n) - N(\mathbf{u}^{n-1}) + 3\frac{1}{\rho_0}G\mathbf{p}^n - \frac{1}{\rho_0}G\mathbf{p}^{n-1} \right) \quad (\text{III.39})$$

Ce schéma, étant explicite, a une condition de stabilité du même type que le schéma Euler explicite.

**Schéma BDF :**

$$\frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2} = -\delta t \left( N(\mathbf{u}^{n+1}) + \frac{1}{\rho_0}G\mathbf{p}^{n+1} \right) \quad (\text{III.40})$$

Ce schéma est implicite et inconditionnellement stable. Les termes visqueux sont linéaires et s'implicitent facilement. En revanche, l'implicitation des termes non linéaires de convection est difficile, et ne se justifie pas le plus souvent, du fait que l'on n'a pas intérêt à utiliser des pas de temps beaucoup plus grand que le pas de temps convectif pour des raisons de précision. On rend donc les termes convectifs explicites en les estimant par extrapolation à partir de  $\mathbf{u}^n$  et  $\mathbf{u}^{n-1}$ , soit :

$$AD(\mathbf{u}^{n+1}) = 2AD(\mathbf{u}^n) - AD(\mathbf{u}^{n-1}) + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (\text{III.41})$$

On obtient par cette procédure le schéma dit **extrapolated BDF**. Ce schéma est dit semi-implicite (ou IMEX, implicit-explicit), seuls les termes visqueux restent implicites. On s'affranchit ainsi de la condition de stabilité relative aux effets visqueux, et le schéma est stable si le pas de temps est de type CFL-convectif.

On remarque que les différents schémas que nous venons de voir peuvent se mettre sous la forme :

$$M\mathbf{u}^{n+1} + \beta\delta t\frac{1}{\rho_0}G\mathbf{p}^{n+\alpha} = R^n \quad (\text{III.42})$$

où  $R^n$  comprend les termes connus des pas de temps précédents,  $M$  est une matrice à coefficients constants, et  $\alpha$  vaut  $0, \frac{1}{2}$  ou 1 suivant le schéma (on a en effet  $\frac{3}{2}p^n - \frac{1}{2}p^{n-1} = p^{n+1/2} + \mathcal{O}(\delta t^2)$  pour le schéma AB2). Le coefficient  $\beta$  vaut 1 pour Euler explicite et AB2,  $\frac{2}{3}$  pour BDF. La matrice  $M$  est l'identité  $I$  pour les schémas explicites, et égale à  $I - \frac{2}{3}\delta t\nu VS$  pour le schéma extrapolated BDF. La discrétisation du système complet III.29 s'écrit alors, de manière générale :

$$\begin{cases} D\mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ M\mathbf{u}^{n+1} + \beta\delta t\frac{1}{\rho_0}G\mathbf{p}^{n+\alpha} = R^n \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

Dans ce système la vitesse et la pression sont couplées. Pour découpler le problème, les méthodes dites de projection sont basées sur le théorème de Hodge-Helmholtz, qui établit qu'un champ vectoriel se décompose en une composante irrotationnelle et une composante solénoïdale (à divergence nulle), soit la somme du gradient d'un champ scalaire et du rotationnel d'un champ vectoriel. Le principe de ces méthodes est ainsi de calculer une première approximation  $\mathbf{u}^*$  de  $\mathbf{u}^{n+1}$ , puis de projeter cette approximation sur le sous-espace des champs à divergence nulle en effectuant la décomposition.

Les méthodes de projection (dites aussi méthodes de correction de pression) font partie de la classe des méthodes à pas fractionnaires. Il en existe plusieurs variantes. On présente ici la méthode dite de prédiction-projection incrémentale [19]. Dans une première étape, on calcule une valeur prédite  $\mathbf{u}^*$  du champ de vitesse par :

$$M\mathbf{u}^* + \beta\delta t \frac{1}{\rho_0} G\mathbf{p}^{n+\alpha-1} = R^n \quad (\text{III.44})$$

La seconde étape, dite de projection (c'est en effet une réalisation de la décomposition de Hodge-Helmholtz), s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^* + \beta\delta t \frac{1}{\rho_0} G(\mathbf{p}^{n+\alpha} - \mathbf{p}^{n+\alpha-1}) = 0 \\ D\mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

Dans le cas explicite, où  $M = I$ , la décomposition (III.44 - III.45) est exacte, en effet en éliminant  $\mathbf{u}^*$  entre III.45<sub>1</sub> et III.44 on retrouve le système originel III.43. Dans le cas implicite, une erreur est associée à la décomposition, mais cette erreur est d'ordre 2 sur la vitesse.

L'étape de projection permet de calculer la pression en appliquant l'opérateur de divergence  $D$  à III.45<sub>1</sub> et en utilisant III.45<sub>2</sub>. L'équation pour la pression s'écrit alors :

$$DG\delta\mathbf{p} = \frac{\rho_0}{\beta\delta t} D\mathbf{u}^* \quad (\text{III.46})$$

avec  $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+\alpha} - \mathbf{p}^{n+\alpha-1}$ . L'opérateur  $DG$ , produit des opérateurs discrets de divergence et gradient, est un opérateur discret représentant le laplacien. L'équation III.46 est donc une équation de Poisson discrète, on l'appelle l'équation de Poisson pour la pression. Après résolution de III.46, on met finalement à jour les champs de vitesse et de pression par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \beta\delta t \frac{1}{\rho_0} G\delta\mathbf{p} \\ \mathbf{p}^{n+\alpha} = \mathbf{p}^{n+\alpha-1} + \delta p \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

Toutes ces étapes doivent être complétées par les conditions aux limites appropriées.

En récapitulant les étapes du calcul d'une itération en temps dans un code Navier-Stokes incompressible instationnaire, on constate que dans le cas implicite on doit résoudre une équation de type Helmholtz discrète pour chacune des composantes de la vitesse

prédite  $\mathbf{u}^*$ , et dans tous les cas une équation de Poisson discrète pour la pression (III.46). Pour le schéma BDF2, les équations de Helmholtz discrètes s'écrivent (III.44) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - \frac{2}{3}\delta t\nu VS)\mathbf{u}^* = S^{n,n-1} \\ \text{avec} \\ S^{n,n-1} = \frac{4}{3}\mathbf{u}^n - \frac{1}{3}\mathbf{u}^{n-1} - \frac{2}{3}\delta t \left( \frac{1}{\rho_0}G\mathbf{p}^n + 2AD(\mathbf{u}^n) - AD(\mathbf{u}^{n-1}) \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.48})$$

Les équations étant discrétisées à l'ordre 2, l'opérateur de Helmholtz est tridiagonal par bande (tridiagonal en 1D, pentadiagonal en 2D, heptadiagonal en 3D) et à diagonale dominante. La réécriture de III.48 sous la forme incrémentale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - \frac{2}{3}\delta t\nu VS)\delta\mathbf{u} = S_i^{n,n-1} \\ \text{avec} \\ \delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n \\ S_i^{n,n-1} = S^{n,n-1} - (I - \frac{2}{3}\delta t\nu VS)\mathbf{u}^n \end{array} \right. \quad (\text{III.49})$$

permet d'utiliser des méthodes de type ADI (Alternating Direction Implicit) en conservant une précision globale d'ordre 2 de la méthode. Les méthodes ADI sont basées sur la factorisation d'un opérateur de Helmholtz multidimensionnel en une séquence d'opérateurs 1D, ce qui simplifie grandement la résolution du système, que l'on réduit à une suite de résolution de systèmes tridiagonaux (l'opérateur laplacien discret en 1D étant tridiagonal). Ces systèmes tridiagonaux peuvent être efficacement résolus de manière directe à l'aide de l'algorithme de Thomas.

L'équation de Poisson pour la pression peut être résolue par une méthode directe (méthode de Gauss) ou itérative (méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR...), suivant notamment la configuration géométrique du problème. Les solveurs de Poisson rapides sont basés sur une transformée de Fourier rapide mais restreints à des coordonnées orthogonales sur domaines rectangulaires. Les méthodes de gradient conjugué (pour les matrices symétriques définies positives) ou GMRES sont bien adaptées pour des matrices de grande taille et creuses. Les méthodes multigrille, associées à une méthode itérative donnée, utilisent plusieurs sous-grilles plus grossières afin d'éliminer plus vite les basses fréquences de l'erreur dans le processus de convergence, et sont souvent très efficaces. Le chapitre de l'inversion de grands systèmes linéaires est le sujet de livres entiers à lui seul (voir par exemple [55]), et on n'ira pas plus loin là-dessus ici. Terminons en disant que la résolution de l'équation de Poisson pour la pression est en général l'étape la plus coûteuse en temps CPU d'un code incompressible.

### III.2.2 Écoulements faible Mach.

Lorsqu'il y a de grandes variations de température dans un écoulement, ou qu'il y a des effets de compressibilité en volume, mais que la vitesse de l'écoulement reste faible, et si l'on ne s'intéresse pas à l'acoustique, la résolution du système compressible des équations

de Navier-Stokes n'est pas efficace, du fait de la séparation d'échelle entre la vitesse du son et la vitesse du fluide. Le pas de temps est limité par la vitesse du son, condition qui devient très restrictive lorsque le nombre de Mach est faible. Le choix du modèle faible Mach tel que nous l'avons établi en section II.3 est alors une bonne alternative. Ce modèle est une extension du modèle strictement incompressible, dont il garde la nature mathématique. Les méthodes numérique vues pour l'incompressible doivent donc être adaptées, mais le traitement du couplage vitesse-pression au coeur de ces méthodes reste inchangé. En effet ce couplage porte sur la pression dynamique, qui n'est pas reliée aux grandeurs thermodynamiques mais garde la même nature qu'en incompressible (multiplicateur de Lagrange assigné à la satisfaction de la contrainte sur la divergence du champ de vitesse). Les changements portent donc sur le calcul des grandeurs thermodynamiques et leur couplage, et la modification de la contrainte sur le champ de vitesse.

Si nous revenons aux grandeurs dimensionnées, le modèle faible Mach s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) & = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p & = \nabla \cdot (\bar{\tau}) \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T & = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{dP_0}{dt} \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

complété de la loi d'état  $P_0 = r\rho T$  pour les gaz parfaits. En tenant compte de l'équation de continuité et de la loi d'état, l'équation pour la température peut aussi s'écrire comme une contrainte sur le champ de vitesses, sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\gamma - 1}{\gamma P_0} \left( \nabla \cdot (k \nabla T) - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dP_0}{dt} \right) \quad (\text{III.51})$$

Une expression pour le calcul de  $P_0$  et  $\frac{dP_0}{dt}$  doit aussi être obtenue. Dans le cas d'un domaine ouvert, la pression  $P_0$  est supposée constante et égale à la pression ambiante. Si le domaine est fermé par des parois solides, on peut intégrer III.51 sur le volume  $\Omega$  du domaine, pour obtenir :

$$\frac{dP_0}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) d\Omega - \gamma P_0 \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (\text{III.52})$$

Si le volume du domaine est constant, le dernier terme de droite est nul. La pression  $P_0$  peut être calculée par intégration de l'équation d'état sur le domaine, soit :

$$P_0 = \frac{rM}{\int_{\Omega} \frac{1}{T} d\Omega} \quad (\text{III.53})$$

avec  $M$  la masse totale de fluide, constante, contenue dans le domaine,  $M = \int_{\Omega} \rho d\Omega$ .

A la différence du cas incompressible, dans ce modèle les problèmes dynamique et thermique sont couplés et l'équation de température doit être résolue. Compte tenu de la loi d'état des gaz parfaits, les champs de masse volumique et de température sont couplés

à travers la pression thermodynamique  $P_0$ , uniforme en espace. En conséquence, il n'est pas possible dans une approche découplée (segregated approach) d'avancer la masse et la température sous forme conservative, et dans le même temps de conserver l'équation d'état, à moins qu'une approche itérative soit adoptée [89], [72]. Les nombreuses approches que l'on trouve dans la littérature [54], [66], [7], [46], [60], [13], [45], [14], [72],[67], [5], [40], [2] diffèrent principalement (outre la discrétisation spatiale) par la façon dont ce couplage entre la masse volumique et la température est traité. Par ailleurs on peut distinguer deux classes de méthodes pour le traitement du couplage vitesse-pression dynamique, suivant que l'on résout une équation de Poisson pour la pression à coefficients constants ou à coefficients variables. On trouvera dans [39] une revue de différentes méthodes de résolution du système faible Mach, ainsi que leur comparaison sur différents cas d'écoulement (cavité différentiellement chauffée, instabilité linéaire en canal non isotherme, interaction flamme-tourbillon). Il est montré que les résultats fournis par les différents algorithmes sont assez proches, mais que la meilleure méthode dépend du cas traité. Certains choix peuvent conduire à des instabilités quand les variations de masse volumique sont grandes.

On présente ici un algorithme dans lequel on résout d'abord une équation pour la température, puis l'équation d'état est utilisée pour le calcul de la masse volumique. Cet algorithme est implanté dans le code SUNFLUIDH développé au LIMSI [18]. Avant de détailler l'algorithme global de résolution du système, on s'intéresse à l'adaptation au cas faible Mach de la méthode de projection incrémentale, définie pour l'incompressible dans la section précédente. La différence est que maintenant la masse volumique est variable, et que le champ de vitesse n'est plus à divergence nulle mais contraint par une relation  $\nabla \cdot \mathbf{v} = S$ , où  $S$  est un terme source donné par exemple par le membre de droite de l'équation III.51 (d'autres écritures sont possibles). L'étape de projection III.45 devient dans le cas faible Mach :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^* + \beta \delta t \frac{1}{\rho^{n+1}} G \delta \mathbf{p} = 0 \\ D \mathbf{u}^{n+1} = S^{n+1} \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

avec  $\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+\alpha} - \mathbf{p}^{n+\alpha-1}$ . A partir de là, deux variantes de l'équation de Poisson pour  $\delta \mathbf{p}$  peuvent être formulées.

**- Variante P1 :**

On commence par multiplier III.54 par  $\rho^{n+1}$  avant d'appliquer l'opérateur divergence  $D$ , soit :

$$DG \delta \mathbf{p} = -\frac{1}{\beta \delta t} (D(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}) - D(\rho^{n+1} \mathbf{u}^*)) \quad (\text{III.55})$$

et l'équation de continuité discrète nous donne  $D(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}) = -\frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial t}$  étant discrétisé suivant le schéma temporel choisi. Pour le schéma BDF2 on écrira  $\frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial t} \simeq \frac{3\rho^{n+1} - 4\rho^n + \rho^{n-1}}{2\delta t}$ . On résout donc une équation de Poisson à coefficients constants comme dans le cas incompressible.

**- Variante P2 :**

On applique cette fois directement l'opérateur divergence  $D$  à III.54, soit après remplacement de III.54<sub>2</sub> :

$$D \frac{1}{\rho^{n+1}} G \delta \mathbf{p} = - \frac{1}{\beta \delta t} (S^{n+1} - D \mathbf{u}^*) \quad (\text{III.56})$$

Les termes  $S^{n+1}$  et  $\rho^{n+1}$  étant estimés au préalable. Dans ce cas, l'opérateur discret est à coefficients variables, ce qui peut nuire à l'efficacité de la méthode. Cependant, des solveurs multigrilles spécifiques ont été développés pour ce type d'équation [50], [42]. Leur efficacité dépend de la discrétisation correcte de la masse volumique dans III.56, afin d'assurer la continuité des flux aux interfaces entre cellules. En effet dans cette formulation  $\rho$  doit être pris en valeur discrète sur les faces des cellules, soit  $\rho_{i+1/2,j}$  pour la direction  $x$  et similairement dans les autres directions, ce qui suppose de prendre une moyenne puisque les grandeurs thermodynamiques sont définies aux centres. La continuité des flux est assurée en prenant une moyenne harmonique, soit :

$$\frac{2}{\rho_{i+1/2,j}^{n+1}} = \frac{1}{\rho_{i,j}^{n+1}} + \frac{1}{\rho_{i+1,j}^{n+1}} \quad (\text{III.57})$$

On présente maintenant l'algorithme global de résolution du système faible Mach. Comme en incompressible, il consiste en une étape de prédiction, puis une étape de projection.

**- Prédiction :**

- Estimation de la masse volumique et de  $\frac{dP_0}{dt}$  en  $t^{n+1}$  par extrapolation linéaire :  $\rho^* = 2\rho^n - \rho^{n-1}$ ,  $\frac{dP_0^*}{dt} = 2\frac{dP_0^n}{dt} - \frac{dP_0^{n-1}}{dt}$ .
- Calcul de la température  $T^{n+1}$  à partir de l'équation III.50<sub>3</sub>. Le terme d'advection, écrit sous forme non conservative, est discrétisé sous la forme :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T|_{i,j} \approx \frac{1}{2}(u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}) \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\delta x} + \frac{1}{2}(v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}) \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\delta y}$$

- Connaissant  $T^{n+1}$ , calcul de  $P_0^{n+1}$  et  $\frac{dP_0}{dt}^{n+1}$  à partir des relations III.53 et III.52.
- Mise à jour de la masse volumique par la loi d'état :  $\rho^{n+1} = P_0^{n+1}/(rT^{n+1})$ .
- Estimation  $\mathbf{v}^*$  du champ de vitesse à partir de l'équation de quantité de mouvement ( III.44).

**- Projection :**

- Calcul du terme source de l'équation de Poisson (variante P1 ou P2).
- Résolution de l'équation de Poisson.
- Mise à jour de la vitesse et de la pression :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \beta \delta t \frac{1}{\rho^{n+1}} G \delta \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^{n+1} + \delta p \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

### III.3 Un aperçu sur les méthodes "all speed".

La recherche d'une méthode unifiée capable de simuler un écoulement quel que soit le nombre de Mach, y compris strictement incompressible, a donné lieu à un grand nombre de travaux et fait l'objet d'une littérature abondante, dont nous ne ferons pas ici l'inventaire (voir par exemple [3], [53], [35], [59], [43], [6]). Notre propos est simplement de donner un bref aperçu sur ce type de méthode, et sur les obstacles rencontrés dans cette recherche d'unification.

Ces méthodes sont généralement appelées "all speed", ou "all Mach". Idéalement, elles devraient être capable de traiter des écoulements fortement compressibles, comportant des ondes de choc, et de dénéger à la limite  $M \rightarrow 0$  vers un solveur purement incompressible. Une telle méthode doit donc être conservative, adaptée au traitement des discontinuités, et comporter une part d'implicitation pour le traitement de la pression lorsque  $M$  devient petit. Différentes approches ont été suivies pour cela, consistant à adapter une méthode compressible au cas des écoulements à Mach petit ou nul, ou inversement à étendre une méthode incompressible pour prendre en compte les effets de compressibilité. Dans tous les cas, l'idée de base consiste à utiliser un algorithme implicite pour le calcul de la pression, qui figure dans la partie acoustique des équations. De cette manière, on s'affranchit de la condition de stabilité liée à l'acoustique, et le pas de temps n'est plus limité que par la vitesse de l'écoulement, dans le cas d'une discrétisation explicite des termes convectifs. L'équation discrète obtenue pour la pression se réduit à l'équation de Poisson habituelle en incompressible lorsque le nombre de Mach tend vers 0, et on obtient ainsi une méthode capable de traiter également les écoulements incompressibles.

On décrit ici les grandes lignes d'une telle méthode (assez analogue à la méthode proposée dans [35]). On ne considère que les équations d'Euler, dans lesquelles on va chercher à implicititer la partie acoustique des équations. Dans le cas où le nombre de Mach est petit, l'écoulement devient isentropique comme nous l'avons vu en section II, et l'équation d'énergie se confond avec l'équation de continuité. Il n'y a donc que deux variables à considérer pour effectuer cette implicitation, la pression (ou la masse volumique, reliée à la pression par la relation d'isentropie), et la vitesse. Nous ne considérons donc que les équations de continuité et de quantité de mouvement dans un premier temps, et nous limitons à écrire la discrétisation temporelle. Une méthode implicite pour l'acoustique peut s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}^n \cdot \nabla \rho^n + \rho^n \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} & = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}^n \cdot \nabla (\rho^n \mathbf{v}^n) + \rho^n \mathbf{v}^n \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} & = 0 \end{cases} \quad (\text{III.59})$$

Afin d'utiliser les méthodes habituelles pour le compressible, il est plus judicieux de tra-

vallier en formulation incrémentale, sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{v}^n) + \rho^n \nabla \cdot (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) & = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{v}^n \otimes \mathbf{v}^n) + \nabla p^n + \rho^n \mathbf{v}^n \nabla \cdot (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) + \nabla (p^{n+1} - p^n) & = 0 \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

Dans une deuxième étape, nous effectuons un splitting du système en deux pas :

- pas explicite : résolution du système compressible complet par une méthode de type "shock capturing", qui fournit une première valeur  $p^{expl}$ ,  $\mathbf{v}^{expl}$  et  $e^{expl}$  de la pression, de la vitesse et de l'énergie,

- pas implicite : résolution implicite de :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^n \nabla \cdot (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) & = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \rho^n \mathbf{v}^n \nabla \cdot (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) + \nabla (p^{n+1} - p^n) & = 0 \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

Dans l'étape implicite, nous utilisons la relation d'isotropie pour écrire  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$ , et nous simplifions la deuxième équation en tenant compte de la première. En discrétisant la dérivée temporelle, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{p^{n+1} - p^{expl}}{\delta t} + \rho^n (c^2)^n \nabla \cdot (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) & = 0 \\ \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{expl}}{\delta t} + \frac{1}{\rho^n} \nabla (p^{n+1} - p^n) & = 0 \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

En prenant la divergence de III.62<sub>2</sub> et en utilisant III.62<sub>1</sub> pour remplacer  $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1}$ , on obtient l'équation elliptique suivante pour la pression :

$$-\frac{1}{\rho^n (c^2)^n} \frac{\delta p}{\delta t^2} + \nabla \cdot \frac{1}{\rho^n} \nabla \delta p = -\frac{\nabla \cdot (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{expl})}{\delta t} + \frac{1}{\rho^n (c^2)^n} \frac{p^n - p^{expl}}{\delta t^2} \quad (\text{III.63})$$

avec  $\delta p = p^{n+1} - p^n$ . Une fois que la pression est calculée par résolution de III.63, on met la vitesse à jour par III.62<sub>2</sub>. La masse volumique et l'énergie sont aussi mises à jour, par la relation d'isotropie  $\rho^{n+1} - \rho^{expl} = \frac{1}{(c^2)^n} (p^{n+1} - p^{expl})$  et la loi d'état du gaz parfait.

Lorsque la vitesse du son tend vers l'infini, l'équation discrète III.63 se réduit bien à l'équation de Poisson habituelle en incompressible. On obtient ainsi une méthode capable de traiter aussi bien des écoulements fortement compressibles (dans ce cas on n'active pas l'étape implicite), que faiblement compressibles voire incompressibles, avec une condition de stabilité uniquement liée à la convection (et éventuellement à la diffusion pour les écoulements visqueux). La méthode, conservative dans l'étape explicite, ne l'est pas globalement. Cependant l'erreur de conservation est faible comme montré dans [35], où une méthode similaire est proposée, et la conservation n'est pas une propriété indispensable lorsqu'il n'y a pas de chocs dans l'écoulement.

Ce type d'approche apporte incontestablement une réponse au problème de l'unification des méthodes. La question de la précision des résultats pour le cas d'écoulements instationnaires à faible Mach reste cependant insuffisamment éclaircie. Dans cette approche, contrairement au modèle faible Mach établi en section II.3, l'acoustique est conservée dans le modèle. Si le pas de temps convectif est grand devant le pas de temps acoustique, ce qui est le cas à faible Mach, l'acoustique n'est pas résolue avec précision, ce qui semble dégrader la précision globale de la simulation. L'analyse de la littérature montre que pour le calcul d'écoulements instationnaires des pas de temps de l'ordre du pas de temps acoustique sont généralement utilisés pour raison de précision. Dans [31] est traité le cas de la dynamique d'une bulle dans un champ acoustique, où il est montré que l'acoustique doit être résolue avec précision pour la précision globale du calcul de l'écoulement, ce qui limite donc le pas de temps dans la partie acoustique du solveur à des valeurs explicites. Le cas test de la colonne d'eau oscillante (Oscillating Water Column, OWC), est traité dans [35] en utilisant un CFL acoustique de 3 au plus. Dans [43] un écoulement instationnaire à faible Mach est présenté en utilisant encore un CFL acoustique égal à 3 pour des raisons de précision temporelle. Nous avons également traité le cas OWC dans [12], en comparant une approche faible Mach et une approche "all Mach". Le résultat de cette comparaison est présenté en section IV.2. La conclusion qui semble émerger est que bien que le pas de temps ne soit plus limité par une condition de stabilité explicite dans ces méthodes, il est toujours limité à des valeurs proches de l'explicite pour assurer la précision de la simulation. Bien sûr, il reste que l'on peut traiter à la fois un écoulement compressible et un écoulement strictement incompressible dans cette approche.

## Chapitre IV

# Écoulements diphasiques.

On s'intéresse dans cette section à quelques cas d'application aux écoulements diphasiques des modèles et méthodes numériques vus dans les sections précédentes. Nous nous intéressons ici aux écoulements diphasiques à phases séparées, dans lesquels deux phases (liquide et gazeuse par exemple), sont séparées par une interface mobile. Si l'on considère un modèle à un fluide, cette interface est une surface à travers laquelle les propriétés et l'état du fluide subissent une discontinuité. Dans le cas sans changement de phase, il n'y a pas de flux de masse à travers l'interface, et celle-ci peut être assimilée à une discontinuité de contact. La vitesse et la pression sont alors continues au travers de l'interface, qui est advectée passivement par l'écoulement (sauf s'il y a des effets de tension superficielle, qui induisent une différence de pression au travers de l'interface). Dans le cas avec changement de phase, il y a un flux de masse et toutes les quantités sont discontinues au travers de l'interface. Comme dans une onde de choc, des relations de saut doivent être vérifiées à l'interface, et la vitesse de celle-ci est gouvernée par ces relations.

Notre propos ici n'est pas d'aborder les méthodes numériques dédiées aux écoulements diphasiques (notamment en ce qui concerne le suivi d'interface), mais de mettre en exergue quelques problématiques spécifiques à ce cas, et leur incidence sur les modèles et les méthodes numériques décrits dans ce qui précède. On ne s'intéresse ici qu'à des écoulements diphasiques à faible Mach (voire incompressibles).

### IV.1 Impact de gouttes.

Nous commençons par un cas purement incompressible, mais traité en compressible. Il s'agit de l'impact d'une gouttelette liquide sur une paroi plane horizontale. Le domaine est ouvert, donc l'air est à la pression atmosphérique, et le problème est traité en 2D axisymétrique. Aux premiers instants de l'impact de la goutte sur la paroi, un jet liquide est produit à la base de la goutte et se propage le long de la paroi. Moyennant la prise en compte des discontinuités de masse volumique et de viscosité entre le liquide et l'air, ainsi

que l'intégration d'un suivi d'interface adapté, un code purement incompressible peut être utilisé pour traiter ce problème, du fait que les vitesses restent largement en dessous de la vitesse du son (dans l'air et dans le liquide). Cependant, l'existence de discontinuités est un facteur d'instabilité dans cette approche. En effet la discrétisation spatiale n'est en général pas très robuste pour leur traitement. Il sera donc difficile de prendre en compte de grands rapports de masse volumique par exemple (tels que pour l'air et l'eau), ou de traiter des fluides très peu visqueux (les termes visqueux étant régularisateurs). Un code compressible basé sur un schéma de type "shock-capturing" est en revanche très bien adapté pour le traitement des discontinuités, qui sont prises en compte naturellement. Le suivi d'interface est naturellement intégré dans le modèle compressible, à travers la partie convective de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Les deux problèmes auxquels nous sommes confrontés dans cette approche sont le problème classique de la contrainte de stabilité acoustique sur le pas de temps, et la diffusion numérique de l'interface intrinsèque à ces méthodes. Pour le suivi d'interface, l'utilisation d'un limiteur compressif de type SuperBee est une solution si le temps d'intégration n'est pas trop long. Il est aussi possible de remplacer ce suivi d'interface "automatique" par une méthode plus sophistiquée, telle qu'une méthode VOF (voir [71] pour une revue de ce type de méthode) ou de type "Front Tracking" [81]. La contrainte sur le pas de temps reste inévitable si l'on utilise un schéma explicite, à moins d'impliciter le sous-système acoustique comme dans une méthode "all Mach". Ici, nous choisissons plutôt de résoudre ce sous-système de façon explicite, en le simplifiant afin de rendre sa résolution plus efficace. On effectue donc le splitting suivant :

- **Sous-système convection+diffusion :**

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\bar{\tau}) \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

- **Sous-système acoustique :**

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Le système IV.3 est écrit sous l'hypothèse d'écoulement isentropique. Cependant, dans le cas diphasique, chaque fluide a sa propre vitesse du son (dans l'air  $c \simeq 340m/s$  tandis que dans l'eau  $c \simeq 1500m/s$ ). L'écoulement est isentropique dans chaque fluide, mais ne l'est pas à travers l'interface. Cependant les particules fluides ne traversent pas l'interface, et de plus la vitesse et la pression sont continues à travers l'interface. On peut donc utiliser

le modèle isentropique dans le cas diphasique aussi. Il reste à définir la vitesse du son que nous utilisons dans IV.3. Une possibilité est de la définir de manière composite, en utilisant la loi d'état des gaz parfaits dans l'air, et une autre équation d'état pour le liquide (par exemple une équation de gaz raide, "stiffened gas"). Cependant, comme montré en section II.1, la variation relative de pression et donc de vitesse du son à l'échelle convective sont en  $\mathcal{O}(M^2)$ . L'écoulement étant à faible Mach, on peut considérer que la vitesse du son est constante ( $c = c_0$ ), et égale dans le liquide et dans le gaz. Le sous-système acoustique devient alors très rapide à résoudre par une méthode TVD par exemple. En effet, d'une part la vitesse du son n'a plus à être calculée. Par ailleurs, les valeurs propres des matrices jacobiniennes de ce système sont  $-c_0$ ,  $c_0$  et 0 (double en 3D). Il n'y a donc plus que 2 variables caractéristiques à considérer, ce qui allège considérablement les calculs. Enfin le décentrement est immédiat puisque le signe des valeurs propres est connu.

Les échelles de temps des deux sous-systèmes IV.2 et IV.3 étant très différentes, nous pouvons itérer plusieurs fois IV.3 à chaque itération en temps de IV.2. Soient  $\delta t_{conv}$  et  $\delta t_{ac}$  les pas de temps donnés par la condition de stabilité propre à chaque sous-système :  $\delta t_{conv} = CFL\delta x / \max_j |\mathbf{v}_j|$  pour IV.2, et  $\delta t_{ac} = CFL\delta x / c_0$  pour IV.3. Le rapport  $\delta t_{ac} / \delta t_{conv}$  étant égal au nombre de Mach  $M$ , si  $M$  est petit on peut effectuer  $1/M$  itérations acoustiques à chaque itération convection+diffusion.

Selon le choix de la vitesse  $c_0$ , on peut ainsi obtenir une méthode efficace pour le traitement de notre problème d'impact de gouttes. Pour cela la vitesse  $c_0$  doit être choisie de manière à ce que le nombre de Mach reste faible dans tout l'écoulement, sans être trop petit toutefois pour ne pas augmenter le nombre de sous-itérations acoustiques. A noter que cette méthode est assez analogue à l'approche de compressibilité artificielle développée par Chorin [8] pour les écoulements incompressibles dans le cas stationnaire, et qui a ensuite été généralisée au cas instationnaire en utilisant une technique de pas de temps dual [63],[64],[16]. Dans notre approche, l'écoulement n'est pas strictement incompressible et nous conservons de faibles effets de compressibilité qui n'ont pas de sens physique réel du fait des simplifications effectuées.

En ce qui concerne les temps de calcul, il est difficile de trancher sur les coûts respectifs d'une approche telle que celle qui vient d'être décrite ou une approche incompressible. La résolution de l'équation de Poisson dans un code incompressible coûte cher, mais des méthodes efficaces existent pour cela. Par ailleurs, dans l'optique du développement des calculateurs massivement parallèles, il est certain que les méthodes complètement explicites peuvent être parallélisées beaucoup plus facilement et efficacement. Quoi qu'il en soit, l'efficacité relative des méthodes est très dépendante du cas traité, notamment du nombre de Reynolds de l'écoulement.

On présente maintenant quelques résultats de simulation d'impact de gouttes avec cette méthode. Cette étude a été publiée dans [56]. L'objet du travail était d'étudier la dynamique de l'impact d'une goutte liquide en fonction de la viscosité du liquide, et

notamment les caractéristiques du jet pariétal qui se développe à la base de la goutte aux premiers instants. La tension de surface est négligée ici, ce qui est justifié par le fait que dans les premiers instants après l'impact l'écoulement est essentiellement gouverné par les effets hydrodynamiques.

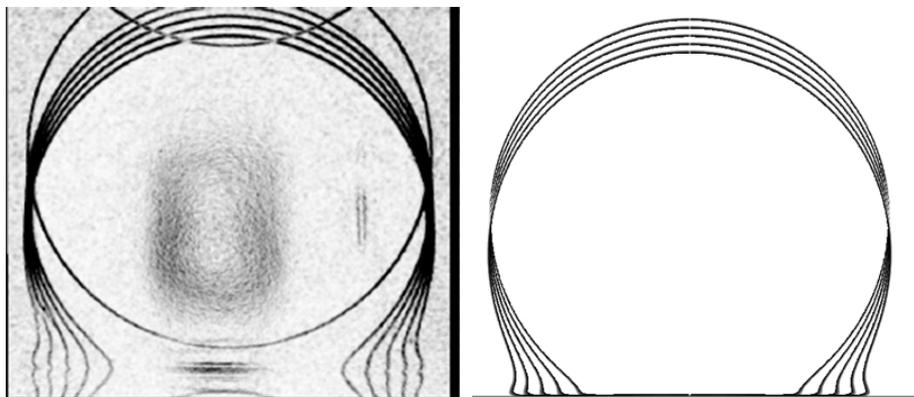


FIG. IV.1 – *Impact de goutte. A gauche : expérience, à droite : simulation numérique. Tiré de [56].*

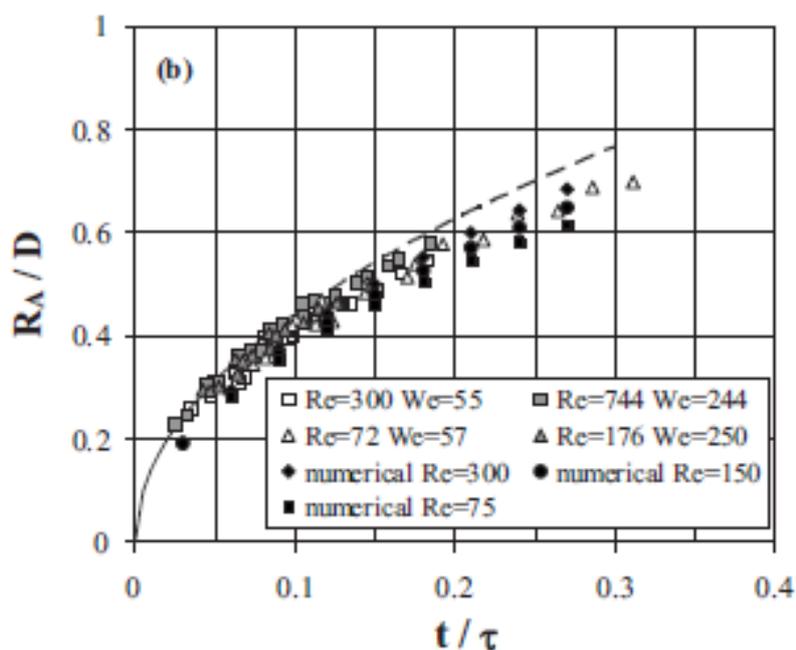


FIG. IV.2 – *Impact de goutte. Evolution de la longueur du jet pariétal, expérience et numérique Tiré de [56].*

On montre sur la figure IV.1 l'interface liquide gaz pour plusieurs instants après l'impact, obtenue par l'expérience (à gauche), et par la simulation numérique (à droite).

L'interface est visualisée par un traitement d'image sur les résultats expérimentaux, et par la représentation du gradient de masse volumique sur les simulations. Le rapport de masses volumiques  $\rho_{\text{liquide}}/\rho_{\text{air}}$  est ici de 1000. L'intervalle est de  $50 \mu\text{s}$  entre les images. Le diamètre de la goutte est  $D = 4,25\text{mm}$ , le liquide est un mélange d'eau et de glycérol de viscosité  $\nu = 92,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , la vitesse avant l'impact est  $U = 1,78\text{m/s}$ , pour un nombre de Reynolds  $Re = \frac{UD}{\nu} = 82$ . On constate un bon accord entre les résultats expérimentaux et numériques. Une étude paramétrique a été effectuée en faisant varier le nombre de Reynolds de l'écoulement. La courbe de la figure IV.2 rassemble les résultats expérimentaux et numériques de l'évolution temporelle de la longueur du jet pariétal, pour plusieurs nombre de Reynolds. On constate que l'accord expérience-simulation numérique est très bon. Ce résultat est confirmé pour d'autres plages du nombre de Reynolds, et montre la bonne qualité des résultats obtenus par notre approche compressible adaptée pour le faible Mach.

## IV.2 Ecoulement liquide gaz en enceinte fermée.

Considérons un écoulement liquide-gaz dans une enceinte fermée. Si le liquide est incompressible et qu'il y a plusieurs zones gazeuses non connexes incluses dans le liquide (par exemple des bulles), ces zones gazeuses peuvent être comprimées ou dilatées. On se trouve donc en présence d'un écoulement comportant à la fois des zones strictement incompressibles, et des zones compressibles dans l'hypothèse faible Mach. On peut aussi penser au cas de la cocotte-minute, dans laquelle coexistent un liquide incompressible (l'eau) et une phase compressible à bas Mach (la vapeur). Traiter ce type de cas nécessite donc de raccorder les deux types d'écoulement. La difficulté est alors la suivante : comment raccorder un modèle strictement incompressible, dans lequel la pression thermodynamique n'est pas définie, à un modèle faible Mach ? De plus, si il existe des zones gazeuses séparées dans notre écoulement, chaque zone aura sa propre pression thermodynamique, uniforme en espace. Comment représenter dans un modèle unique l'écoulement dans le liquide et dans les différentes zones gazeuses ?

Nous nous intéressons donc ici au problème du raccord entre le modèle incompressible et le modèle faible Mach. Afin de développer un modèle généralisé capable de représenter les deux phases, nous commençons par introduire une fonction  $H$ , caractéristique du gaz, ie  $H(\mathbf{x},t) = 1$  dans le gaz, et  $H(\mathbf{x},t) = 0$  dans le liquide. Si  $N$  zones gazeuses (bulles) non connexes sont présentes dans le domaine, nous attribuons une fonction caractéristique  $H_j$  à chacune, et définissons  $H = \sum_{j=1}^N H_j$ . De plus, nous définissons une pression thermodynamique  $P_j(t)$  propre à chaque bulle. Ceci nous permet, en utilisant la loi d'état du gaz parfait dans le gaz, de définir une masse volumique pour le fluide composite :

$$\rho(\mathbf{x},t) = \sum_{j=1}^N H_j(\mathbf{x},t) \frac{P_j(t)}{rT(\mathbf{x},t)} + (1 - H(\mathbf{x},t))\rho_l \quad (\text{IV.4})$$

$\rho_l$  étant la masse volumique (constante) du liquide. L'équation de continuité et l'équation pour la température peuvent s'écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = H(\mathbf{x}, t) \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} - \sum_{j=1}^N H_j(\mathbf{x}, t) \frac{1}{P_j} \frac{dP_j}{dt} \quad (\text{IV.5})$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} T \sum_{j=1}^N H_j(\mathbf{x}, t) \frac{1}{P_j} \frac{dP_j}{dt} \quad (\text{IV.6})$$

De cette manière, le modèle est strictement incompressible dans les zones où  $H = 0$ , et on retrouve le modèle faible Mach dans les zones gazeuses. Il reste à former une équation composite pour la quantité de mouvement. Cependant, nous devons raccorder plusieurs zones gazeuses séparées par un fluide incompressible. Les zones gazeuses sont à des pressions thermodynamiques différentes, et cette différence de pression induit une force extérieure appliquée sur le liquide. Cette force ne peut être représentée par le terme de pression présent dans l'équation de quantité de mouvement du modèle incompressible ou faible Mach, puisque cette pression est d'un ordre de grandeur beaucoup plus petit que la pression thermodynamique. Il faut donc inclure un nouveau terme de pression  $P_e(\mathbf{x}, t)$  (ou plutôt conserver la pression thermodynamique) dans l'équation de quantité de mouvement, sous la forme :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla(p + P_e) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (\text{IV.7})$$

Nous appellerons cette pression  $P_e$  la pression étendue (bien qu'elle n'ait pas la nature d'une pression dans le liquide). Elle doit être égale aux pressions  $P_j$  dans les zones gazeuses, et respecter l'incompressibilité du fluide dans les zones liquides, c'est à dire être harmonique dans le liquide, soit :

$$\begin{cases} \nabla^2 P_e(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{dans le liquide} \\ P_e(\mathbf{x}, t) = P_j(t), & \text{dans chaque bulle} \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

Ces contraintes peuvent être condensées dans l'équation de Helmholtz suivante pour  $P_e$  :

$$\frac{1}{\eta^2} P_e(\mathbf{x}, t) \cdot H(\mathbf{x}, t) + (1 - H(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla^2 P_e(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N H_j(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{1}{\eta^2} P_j(t) \quad (\text{IV.9})$$

Le modèle est complété par une équation intégrale dans chaque bulle  $\Omega_j(t)$  pour le calcul des pressions  $P_j$  :

$$\frac{1}{P_j} \frac{dP_j}{dt} = \frac{1}{\int_{\Omega_j(t)} d\mathbf{x}} \left( \int_{\Omega_j(t)} \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} d\mathbf{x} - \int_{\Omega_j(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \right) \quad (\text{IV.10})$$

On trouvera plus de détails sur ce modèle dans [12].

Ce modèle a été utilisé dans [12] pour traiter le cas test OWC [35], et comparé à un modèle du type "all Mach", à une seule pression. A l'état initial (figure IV.3), un tube fermé est rempli d'une colonne d'eau incluse entre deux colonnes de gaz. Une vitesse est imposée au fluide dans son ensemble. Au démarrage, l'air à droite est donc comprimé par le liquide, tandis que l'air à gauche se détend. Une différence de pression est ainsi engendrée de part et d'autre de la colonne liquide, et la colonne se met à osciller. Dans ces calculs, le pas de temps est fixé à partir d'un critère acoustique, sous la forme :

$$\delta t = CFL \frac{\delta x}{\max_j(|u_j| + c_l)}$$

où  $c_l$  est la vitesse du son dans le liquide.

On montre sur les figures IV.4 et IV.5 les pressions relatives atteintes au cours du temps sur les parois de gauche et de droite du tube. Les résultats sont comparés pour  $CFL = 1$  et  $CFL = 100$ . La valeur  $CFL = 100$  donne un pas de temps d'ordre convectif. Pour le calcul basé sur la méthode faible Mach dans le gaz, on constate que le résultat est pratiquement indépendant du pas de temps, et que l'utilisation d'un pas de temps convectif donne un résultat de bonne précision. En revanche la méthode "all Mach" est très dépendante du pas de temps, et l'utilisation d'un pas de temps convectif amène une dégradation inacceptable des résultats. Cette méthode nécessite donc l'utilisation d'un pas de temps de l'ordre du pas de temps acoustique pour la précision des résultats, bien qu'elle soit stable bien au delà. Ce résultat démontre l'intérêt du modèle faible Mach dans ce type de configuration.

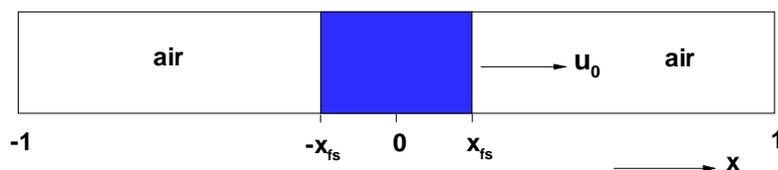


FIG. IV.3 – Conditions initiales pour le cas OWC.

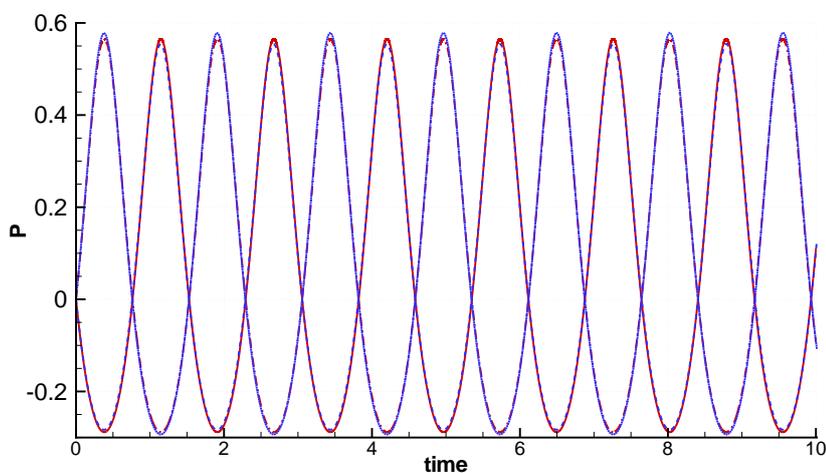


FIG. IV.4 – Méthode faible Mach. Evolution temporelle des pressions relatives dans la colonne gazeuse de gauche et de droite (lignes rouges, CFL=1, lignes bleues, CFL=100).

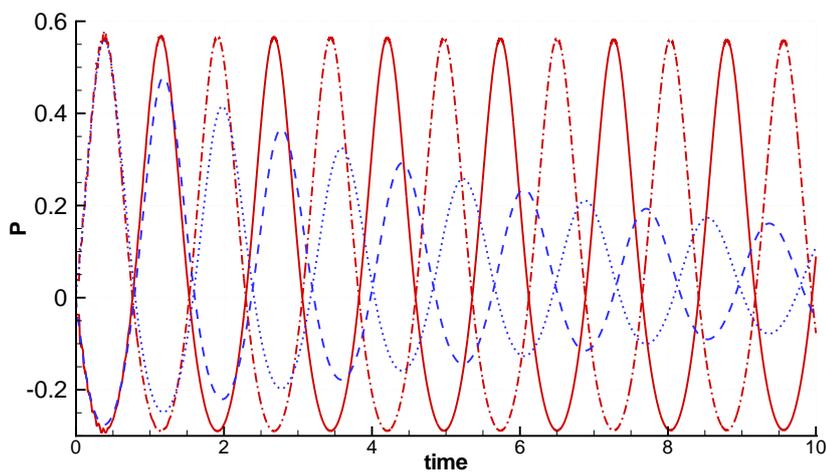


FIG. IV.5 – Méthode à un pression ("all Mach"). Evolution temporelle des pressions relatives dans la colonne gazeuse de gauche et de droite (lignes rouges, CFL=1, lignes bleues, CFL=100).

# Bibliographie

- [1] D.S. Balsara, C.W. Shu: ‘Monotonicity Preserving Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes with Increasingly High order of Accuracy’, *Journal of Computational Physics*, **160**, 405–452 (2000).
- [2] A.Bermúdez, J.L. Ferrín, L. Saavedra, M.E. Vázquez-Cendón: ‘A projection hybrid finite volume/element method for low-Mach number flows’, *Journal of Computational Physics*, **271**, 360–378 (2014).
- [3] H. Bijl and P. Wesseling: ‘A unified Method for computing incompressible and compressible flows in boundary-fitted coordinates’, *Journal of Computational Physics*, **141**, 153–173 (1998).
- [4] C. Bogey, N. de Carqueray, C. Bailly: ‘A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations’, *Journal of Computational Physics*, **228**, 1447–1465 (2009).
- [5] Ouafa Bouloumou, Eric Serre, Patrick Bontoux , Jochen Frohlich: ‘A 3D pseudo-spectral low Mach-number solver for buoyancy driven flows with large temperature differences’, *Computers and Fluids*, **66**, 107–120 (2012).
- [6] Chen Z. J., Przekwas A. J.: ‘A coupled pressure-based computational method for incompressible/compressible flows’, *J. Comput. Phys.*, **229**, 9150-9165 (2010)
- [7] Cook A, Riley J.: ‘Direct numerical simulation of a turbulent reactive plume on a parallel computer’, *Journal of Computational Physics*, **129**, 263–283 (2008).
- [8] A. J. Chorin: ‘A numerical method for solving incompressible viscous flow problems’, *J. Comput. Phys.*, **2**, 12 (1967)
- [9] A. J. Chorin: ‘Numerical solution of the Navier-Stokes equations’, *Math. Comput.*, **22**, 745-762 (1968)
- [10] V. Daru, C. Tenaud: ‘High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flows calculations’, *Journal of Computational Physics*, **193**, 563–594 (2004).
- [11] V. Daru, X. Gloerfelt: ‘Aeroacoustic Computations Using a High-Order Shock-Capturing Scheme’, *AIAA Journal*, **45**(10), 2474–2486 (2007).
- [12] V. Daru, P. Le Quéré, M.-C. Duluc, O. Le Maître: ‘A numerical method for the

- simulation of low Mach number liquid-gas flows', *Journal of Computational Physics*, **229**, 8844–8867 (2010).
- [13] de Charentenay J, Thévenin D, Zamuner B.: 'Comparison of direct numerical simulations of turbulent flames using compressible or low-Mach number formulations', *Journal of Computational Physics*, **181**(2), 545–563 (2002).
- [14] Desjardins O, Blanquart G, Balarac G, Pitsch H.: 'High order conservative finite difference scheme for variable density low Mach number turbulent flows', *Journal of Computational Physics*, **227**(15), 7125–7159 (2008).
- [15] M. O. Deville, P. F. Fischer, E. H. Mund: 'High -Order Methods for Incompressible Fluid Flow', Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press (2002).
- [16] D. Drikakis, O. P. Iliev, and D. P. Vassileva: 'A nonlinear multigrid method for the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations', *Journal of Computational Physics*, **146**, 301 (1998).
- [17] Forester, C., Emery, A.: 'A computational method for low mach number unsteady compressible free convective flows', *J. Comput. Physics*, **10**(3), 487–502 (1972)
- [18] Fraigneau Y.: 'Principes de base des méthodes numériques utilisées dans le code SUNFLUIDH pour la simulation des écoulements incompressibles et à faible nombre de Mach', Notes et documents LIMSIS N° 2013-09 (2013)
- [19] K. Goda: 'A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows', *J. Comput. Physics*, **30**, 76–95 (1979)
- [20] E. Godlewski, P.-A. Raviart: 'Hyperbolic Systems of Conservation Laws', *Mathématiques et Applications*, **3/4**, Ellipses (1991).
- [21] E. Godlewski, P.-A. Raviart: 'Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws', *Applied Mathematical Sciences*, **118**, Springer (1996).
- [22] S.K. Godunov: 'A difference scheme for numerical computations of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics', *Mat. Sb.*, **4789**, 271–306 (1959).
- [23] J. B. Goodman, R. J. LeVeque: 'On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws', *Math. Comp.*, **45**, 15–21 (1985).
- [24] Guermond J. L., Minev P. and Shen Jie: 'An overview of projection methods for incompressible flows', *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **195**, 6011–6045 (2006).
- [25] P. Haldenwang: 'Méthodes numériques d'ordre élevé pour les écoulements contraints', *11ème Ecole de Printemps de Mécaniques des Fluides Numérique*, Oléron, juin 2009.
- [26] A. Harten: 'High resolution schemes for hyperbolic conservation laws', *Journal of Computational Physics*, **49**, 357–393 (1983).
- [27] A. Harten: 'On a class of high resolution total variation stable finite differences schemes', *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **21**, 1–23 (1984).

- [28] A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy: 'Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III', *Journal of Computational Physics*, **71**, 231–303 (1987). Aussi (reprint): *Journal of Computational Physics*, **131**, 3–47 (1997)
- [29] C. Hirsch: 'Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol. I: Fundamentals of Numerical Discretization', John Wiley and Sons eds., (1988).
- [30] C. Hirsch: 'Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol. II: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows', John Wiley and Sons eds., (1990).
- [31] Ida M.: An improved unified solver for compressible and incompressible fluids involving free surfaces. II. Multi-time-step integration and applications. *Computer Physics Comm.*, **150**(3), 300–322 (2003)
- [32] A. Jameson, W. Schmidt, E. Turkel: 'Numerical simulation of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes', *AIAA Paper 81-1259*, AIAA 5th Computational Fluid Dynamics Conference (1981).
- [33] A. Jameson: 'Transonic aerofoil calculations using the Euler equations', In P.L. Roe (ed.), *Numerical Methods in Aeronautical Fluid Dynamics*, New York, Academic Press (1982).
- [34] G.S. Jiang, C.W. Shu: 'Efficient implementation of weighted ENO schemes', *Journal of Computational Physics*, **126**, 202–228 (1996).
- [35] Kadioglu S. Y., Sussman M., Osher S., et al.: 'A second order primitive preconditioner for solving all speed multi-phase flows'. *Journal of Computational Physics*, **209**(2), 477–503 (2005)
- [36] N. A. Kampanis, J. A. Ekaterinaris: 'A staggered grid, high-order accurate method for the incompressible Navier-Stokes equations', *Journal of Computational Physics*, **215**, 589–613 (2006)
- [37] J. Kim, P. Moin: 'Application of a fractional step method to incompressible flows', *Journal of Computational Physics* **59**, 308–323 (1985).
- [38] R. Knikker: 'Study of a staggered grid fourth-order compact scheme for unsteady incompressible viscous flows', *Int. J. for Num. Methods in Fluids* **59**(10), 1063–1092 (2009).
- [39] R. Knikker: 'A comparative study of high-order variable-property segregated algorithms for unsteady low Mach number flows', *Int. J. for Num. Methods in Fluids* **66**, 403–427 (2011).
- [40] Mahdi Kooshkbaghi and Bamdad Lessani: 'A collocated grid, projection method for time-accurate calculation of low-Mach number variable density flows in general curvilinear coordinates', *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **72**, 301–319 (2013).
- [41] Omar M. Knio: 'Approaches to Low-Mach-Number Flows', Cours de l'Ecole de printemps MFN, CNRS (2009).

- [42] Kwak, D., Lee, J.: 'Multigrid algorithm for the cell-centered finite difference method ii: discontinuous coefficient case'. *Num. methods for partial differential equations*, **20**(5), 742–764 (2004)
- [43] Kwatra N., Su J., Gretarsson J. T., Fedkiw R.: A method for avoiding the acoustic time step restriction in compressible flow. *Journal of Computational Physics*, **228**(11), 4146–4161 (2009)
- [44] P. D. Lax, B. Wendroff: 'Systems of Conservation Laws', *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **13**, 217–237 (1960).
- [45] Lessani B, Papalexandris MV: 'Time-accurate calculation of variable density flows with strong temperature gradients and combustion', *Journal of Computational Physics*, **212**(1), 218–246 (2006).
- [46] Najm HN, Wyckoff PS, Knio OM.: 'A semi-implicit numerical scheme for reacting flow: I. Stiff chemistry', *Journal of Computational Physics*, **143**(2), 381–402 (1998).
- [66] Le Quéré, P., Masson, R., Perrot, P.: 'A chebyshev collocation algorithm for 2d non-boussinesq convection', *J. Comput. Physics*, **103**(2), 320–335 (1992)
- [48] R. J. LeVeque: 'Numerical Methods for Conservation Laws', *Lectures in Mathematics*, ETH Zürich, Birkhäuser (1992).
- [49] Liu, X.-D., Osher, S., Chan, T.: 'Weighted essentially non-oscillatory schemes', *Journal of Computational Physics* **115**: 200–212.
- [50] Liu, C., Liu, Z., McCormick, S.: 'An efficient multigrid scheme for elliptic equations with discontinuous coefficients'. *Comm. in Applied Num. Meth.* **8**, 621–631 (1992)
- [51] A. Majda: 'Compressible Fluid Flow and Systems of Conservations Laws ,in Several Space Variables', Springer Verlag, New-York (1984).
- [52] A. Majda, J. Sethian: 'The derivation and numerical solution of the equations for zero Mach number combustion', *Combustion Science and Technology*, **42**, 185–205 (1985).
- [53] I. Mary, P. Sagaut, M. Deville: 'An algorithm for low Mach number unsteady Flows', *Computers and Fluids*, **29**, 119–147 (2000).
- [54] McMurtry P., Jou O. M., Riley J., Metcalfe R.: 'Direct numerical simulations of a reacting mixing layer with chemical heat release', *AIAA Journal*, **24**, 962–970 (1986).
- [55] G. Meurant: 'Computer solution of large linear systems'. North-Holland (1999).
- [56] A. Mongruel, V. Daru, F. Feuillebois, and S. Tabakova: 'Early post-impact time dynamics of viscous drops onto a solid dry surface', *Physics of Fluids*, **21**, 032101 (2009).
- [57] Y. Morinishi, T. Lund, O. Vasilyev, and P. Moin: 'Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flows', *Journal of Computational Physics*, **143**(1), 90–124 (1998).
- [58] B. Müller: 'Low Mach number asymptotics of the Navier-Stokes equations and numerical implications', 30<sup>th</sup> Computational Fluid Dynamics, VKI Lecture Series 1999-03 (1999).

- [59] K. Nerinckx, J. Vierendeels, E. Dick: 'Mach-uniformity through the coupled pressure and temperature correction algorithm', *Journal of Computational Physics*, **206**, 597–623 (2005).
- [60] F. Nicoud: 'Conservative High-Order Finite-Difference Schemes for Low-Mach Number Flows', *Journal of Computational Physics*, **158**, 71–97 (2000).
- [61] Paolucci, S.: Sandia National lab. Report SAND 82-8257. Unpublished (1982)
- [62] R. Peyret: 'Spectral methods with application to incompressible viscous flow', Springer Verlag, 2002
- [63] R. Peyret: 'Unsteady evolution of a horizontal jet in a stratified fluid', *J. Fluid Mech.*, **78**, 49 (1976).
- [64] R. Peyret and T. D. Taylor: 'Computational Methods for Fluid Flow', Springer, New York, 1983.
- [65] R. Peyret: 'Handbook of Computational Fluid Mechanics', Edited by Roger Peyret, Academic Press, 2000.
- [66] P. Le Quéré, R. Masson, and P. Perrot: 'A Chebyshev collocation algorithm for 2D Non-Boussineq Convection', *Journal of Computational Physics*, **103**, 320–335 (1992).
- [67] Pieter Rauwoens, Jan Vierendeels, Erik Dick, Bart Merci: 'A conservative discrete compatibility-constraint low-Mach pressure-correction algorithm for time-accurate simulations of variable density flows', *Journal of Computational Physics*, **228**, 4714–4744 (2009).
- [68] P. L. Roe: 'Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes', *Journal of Computational Physics*, **43**, 357–372 (1981).
- [69] R. G. Rehm and H. R. Baum: 'The equation of motion for thermally driven buoyant flows', *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **83**:297-308, 357–372 (1978).
- [70] C. M. Rhie and W. L. Chow: 'Numerical study of the Turbulent flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation', *AIAA Journal*, **21**:11, 1525–1532 (1983).
- [71] R. Scardovelli and S. Zaleski: 'Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow', *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **31**, 567 (1999).
- [72] Sewall E. A., Tafti D. K.: 'A time accurate variable property algorithm for calculating flows with large temperature variations', *Computers and Fluids* **37**(1), 51–63, (2008).
- [73] C.W. Shu, S. Osher: 'Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes', *Journal of Computational Physics*, **77**, 439–471 (1988).
- [74] C.W. Shu, S. Osher: 'Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II', *Journal of Computational Physics*, **83**, 32–79 (1989).
- [75] C.W. Shu, T.A. Zang, G. Erlebacher, D. Whitaker, S. Osher: 'High order ENO schemes applied to two and three dimensional compressible flows', *Applied Numerical Mathematics: Transactions of IMACS*, **9**, 45–71 (1992).

- [76] C.W. Shu: ‘Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws’, NASA/CR-97-206253 and ICASE Report 97-65 (1997).
- [77] G. Strang: ‘On the construction and comparison of difference schemes’, *SIAM Journal Numer. Anal.*, **5**, 506–517 (1968).
- [78] A. Suresh, H.T. Huynh: ‘Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge-Kutta Time Stepping’, *Journal of Computational Physics*, **136**, 83–99 (1997).
- [79] Temam R.: ‘Sur l’approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires ii’, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **33**, 377–385 (1969).
- [80] E.F. Toro: ‘Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluids Dynamics’, Springer Verlag, Second edition (1999).
- [81] Tryggvason, G., Bunner, B., Esmaeeli, A., Juric, D., Al-Rawahi, N., Tauber, W., Han, J., Nas, S., Jan, Y.: ‘A front-tracking method for the computations of multiphase flow’. *J. Comput. Physics*, **169**(2), 708–759 (2001)
- [82] B. Van Leer: ‘Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. I. The Quest of Monotonicity.’, in *Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, Lecture Notes in Physics **18**, 163–168, Springer Verlag (1973).
- [83] B. Van Leer: ‘Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme.’, *Journal of Computational Physics* **14**, 361–370, (1974).
- [84] B. Van Leer: ‘Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. III. Upstream-Centered Finite Difference Schemes for Ideal Compressible Flow.’, *Journal of Computational Physics* **23**, 263–275, (1977).
- [85] B. Van Leer: ‘Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. III. A new approach to numerical convection.’, *Journal of Computational Physics* **23**, 276–299, (1977).
- [86] B. Van Leer: ‘Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. III. A second order sequel to Godunov’s method.’, *Journal of Computational Physics* **32**, 101–136, (1979).
- [87] J. Von Neumann, R. D. Richtmyer: ‘A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks’, *Journal of Mathematical Physics*, **21** (1950).
- [88] Pieter Wesseling: ‘Principles of Computational Fluid Dynamics.’, Springer Series in Computational Mathematics, Springer (2001).
- [89] Wall C., Pierce C., Moin P.: ‘A semi-implicit method for resolution of acoustic waves in low Mach number flows’, *Journal of Computational Physics* **181**, 545–563, (2002).
- [90] H.C. Yee: ‘A class of high resolution explicit and implicit shock-capturing methods’, dans *High resolution (upwind and TVD) methods for the compressible flow equations*, Selected special topics from previous VKI lecture series, Von Karman Institute (1994).